Oral agro 2019

Exercice (non publié) :

On dispose de N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher, et de 2 urnes A et B.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant.
On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

1. Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Déterminer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k-1)$ et $P(X_n = k+1)$.
2. a) Écrire une fonction `etape` prenant en arguments `k` (nombre de boules dans A à un instant donné) et `N` et renvoyant la valeur nombre de boules dans A à l'instant suivant .
   b) Écrire une fonction renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par $X_0, ..., X_n$.

   A partir de maintenant et dans toute la suite, on suppose $N = 3$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$; on note aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,
   a) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.
   b) Montrer que 1 est valeur propre de M et donner le sous espace propre associé .
   c) On suppose que X_0 suit une loi binomiale de paramètres 3 et 1/2. Quelle loi suit alors X_n ?
   d) Quel est l'ensemble des lois que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 ?
4. On suppose que l'urne A est initialement vide. On appelle D la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne A soit à nouveau vide.
   a) Ecrire une fonction python simulant D.
   b) i. Calculer $P(D = 2)$ et $P(D = 4)$.
      ii. Pourquoi D ne peut-il prendre que des valeurs paires ?
      iii. Montrer que $P(X_{2k+2} = 0) = \frac{1}{9} P(X_{2k} = 0) + \frac{2}{9}$.
      (Question non posée et non indispensable pour la suite, mais que je pose pour les révisions : calculer $P(X_{2k} = 0)$ en fonction de k.)
      iv. On note désormais $u_k = P(X_{2k} = 0)$ et $d_k = P(D = 2k)$.
      Montrer que $(X_{2k} = 0) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} ((X_{2k} = 0) \cap (D = 2j))$.
      v. En déduire que $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.
   c) A l'aide des relations $u_{k+1} = \frac{1}{9} u_k + \frac{2}{9}$ et $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$, écrire une fonction Python renvoyant la liste $[d_1, \ldots, d_n]$.