Devoir surveillé 3 : Algèbre matricielle et probabilités

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème. Dans ce dernier, les parties ne sont pas de difficultés croissantes et on prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer. On pourra, à titre indicatif, consacrer 30 mn à l'exercice et 2h20 au problème (10 mn étant réservées à la relecture !).
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de deux manières différentes la puissance n-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode :
   a) Exprimer J^n en fonction de J pour tout entier naturel n.
   b) Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$.
   c) Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2. Deuxième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I_3 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) n'admet pas une unique solution. On notera désormais λ_1 et λ_2 ces deux valeurs avec $\lambda_1 > \lambda_2$.
      ii. Soit E_λ l'ensemble des solutions de (S_λ). Déterminer E_{λ_1} et E_{λ_2}.
   b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est constituée de 3 colonnes dont l'une est solution de E_{λ_1} et les deux autres sont solutions de E_{λ_2}. Montrer que P est inversible. Calculer P^{-1}.
   c) Calculer $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n.
   d) Exprimer M en fonction de D, P et P^{-1} et démontrer que $M^n = PD^nP^{-1}$ pour tout entier naturel n.
   e) Retrouver l'expression de M^n obtenue par la première méthode.

Problème (Agro A 2018) : Modèle de diffusion d'Ehrenfest.

On considère deux urnes U_1 et U_2 contenant à elles deux N boules avec $N \in \mathbb{N}^*$. À chaque étape, on choisit de façon équiprobable un entier entre 1 et N. Si ce nombre est inférieur ou égal au nombre de boules contenues dans l'urne U_1, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 ; sinon, on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 à l'étape n. La variable aléatoire X_0 est donc égale au nombre de boules initialement présentes dans l'urne U_1, la variable aléatoire X_1 est égale au nombre de boules présentes dans l'urne U_1 après un échange.
Par exemple, si l'urne U_1 contient initialement 3 boules et l'urne U_2 en contient 2, alors $N = 5$ et $X_0 = 3$.
On choisit alors un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 2, alors on met une boule de l'urne U_1 dans l'urne U_2 et l'on a $X_1 = 2$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. S'il est égal à 3, alors on met une boule de l'urne U_2 dans l'urne U_1 et l'on a $X_1 = 3$. On choisit alors de nouveau un entier de façon équiprobable entre 1 et 5. À ? l'issue de l'échange, on aura $X_3 = 2$ avec une probabilité de $3/5$ et $X_3 = 4$ avec une probabilité de $2/5$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\quad Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X_n = N) \end{pmatrix}$. On a donc :

$$\forall k \in [\![0, N]\!], \quad Y_{n,k} = \mathbb{P}(X_n = k).$$

Partie I : Matrice de transition

① On suppose que $N = 2$.

a) Prouver à l'aide de la formule des probabilités totales que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$Y_{n+1} = A_2 Y_n \text{ avec } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

✐ *Une récurrence n'est pas nécessaire.*

b) Montrer qu'il existe trois valeurs de λ réelles telles que $A_2 - \lambda I_3$ est non inversible.
En posant $E_\lambda(A)$ l'ensemble des solutions du système (S_λ) : $AX = \lambda X$, justifier que $E_\lambda(A_2)$ est non réduit à la seule solution nulle pour chacune des valeurs de λ obtenues précédemment (✐*on ne demande pas de résoudre les systèmes*).

c) Montrer que $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in E_1(A_2) \Leftrightarrow x_k = \binom{2}{k} x_0$, alors pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$ où $\binom{2}{k}$ désigne une combinaison de k éléments pris parmi 2.

Dans toute la suite $N \in \mathbb{N}^*$ est fixé.

② Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Déterminer $\mathbb{P}(X_{n+1} = k)$ en fonction de $\mathbb{P}(X_n = k-1)$ et $\mathbb{P}(X_n = k+1)$.

③ a) Écrire une fonction `etape` prenant en argument `k` (nombre de boules dans U_1 à un instant donné) et `N` et renvoyant la valeur du nombre de boules dans U_1 à l'instant suivant.

b) Écrire une fonction `boulesDansU1(a, n, N)` d'arguments `a` le nombre initial de boules dans U_1, `n` le nombre d'échanges et `N` le nombre de boules et renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par $X_0, \cdots X_n$.

④ On considère la matrice de $\mathcal{M}_{N+1}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{N} & 0 \dots & \dots & & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{N} \dots & & & & \vdots \\ 0 & \frac{N-1}{N} & \dots & \dots & & & \vdots \\ \vdots & & \dots & \dots & \dots & \frac{N-1}{N} & \vdots \\ \vdots & & \dots & \dots & \frac{2}{N} & 0 & 1 \\ 0 & & & \dots & \dots & \frac{1}{N} & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est donc une matrice ne comportant que des termes non nuls sur la première sur-diagonale, et sur la première sous-diagonale. Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = AY_n$$

⑤ Déterminer lorsque $N = 2$ et $N = 3$ $E_1({}^tA_2)$ et $E_1({}^tA_3)$.

⑥ Prouver que, dans le cas général, $E_1({}^tA) \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ et que $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in E_1({}^tA)$.

⑦ En déduire que la matrice ${}^t(A - I_{N+1})$ est non inversible puis que $A - I_{N+1}$ est non inversible. En déduire qu'il existe $X \neq 0$ tel que $AX = X$ (*On ne cherchera pas à le déterminer*).

Partie II : Détermination de l'espérance de la variable X_n

Dans la suite, $n \in \mathbb{N}$ est fixé.

① Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire $X_{n+1} - X_n$?

② On souhaite obtenir l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et de $\mathbb{E}(X_0)$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = 1) = \sum_{k=0}^{N} \frac{N-k}{N} \mathbb{P}(X_n = k)$.

Trouver une relation similaire pour $\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n = -1)$.

b) En déduire que : $\mathbb{E}(X_{n+1} - X_n) = 1 - \frac{2}{N}\mathbb{E}(X_n)$.

c) En déduire l'expression de $\mathbb{E}(X_n)$ en fonction de n et de $\mathbb{E}(X_0)$.

③ On suppose $N > 2$. Déterminer la limite de $\mathbb{E}(X_n)$ lorsque n tend vers ∞, en donner une interprétation.

Partie III : Recherche d'une probabilité invariante

On s'intéresse dans cette question à l'ensemble des vecteurs $X \in \mathcal{M}_{N+1,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $AX = X$, qu'on continue à noter $E_1(A)$.

① Soit $X = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} \in E_1(A)$. Prouver que pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $\quad x_k = \binom{N}{k} x_0$.

② En déduire $\dim(E_1(A))$.

③ Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}$.

④ Prouver qu'il existe un unique vecteur $\pi = \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_N \end{pmatrix} \in E_1$ tel que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \pi_k = 1$.

On donnera son expression.

⑤ On considère la variable aléatoire X_∞ telle que :

$$X_\infty(\Omega) = [\![0, N]\!], \quad \forall k \in [\![0, N]\!], \quad \mathbb{P}(X_\infty = k) = \pi_k.$$

Quelle est la loi de X_∞ ? Donner son espérance et sa variance.

⑥ On suppose que X_0 suit la même loi que X_∞. Déterminer la loi de X_n pour tout entier n et donner une interprétation.