Devoir maison : Séries et probabilités

Problème :

Une urne contient $2n$ jetons numérotés de 1 à n : chaque jeton apparaît deux fois dans l'urne sous deux couleurs distinctes (bleue et rouge). On effectue des tirages simultanés de deux jetons. Si les jetons tirés sont identiques (en valeur) alors on les enlève de l'urne. Sinon, on les remet tous les deux dans l'urne.
Soit T_n la variable aléatoire qui compte le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne de son contenu.

① Cas où l'urne ne contient qu'une paire ($n = 1$) : Quelle loi suit la variable T_1 ?

② On suppose $n = 2$: (2 paires). Soit P_i l'événement : « on tire une paire au tirage n° i ».

a) Déterminer $T_2(\Omega)$.

b) Combien y a-t-il de tirages simultanés possibles de 2 jetons ? En déduire $\mathbb{P}(P_1)$.

c) Exprimer $(T_2 = 2)$ à l'aide de P_1 et P_2 et plus généralement, pour tout $k \geq 2$, $(T_2 = k)$ en fonction des événements $P_1, P_2, \cdots, P_{k-1}$ et P_k.

d) Montrer que $\mathbb{P}(T_2 = k) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{k-1}$ pour tout $k \geq 2$.

e) *Rappel :* Si $\sum k\mathbb{P}(T_2 = k)$ cv, alors $\mathbb{E}(T_2)$ existe et vaut : $\displaystyle\sum_{k \in T_2(\Omega)} k\mathbb{P}(T_2 = k)$. Que vaut $E(T_2)$?

③ On revient au cas n quelconque.

a) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui retourne la liste des $2n$ jetons.

b) Écrire une fonction qui simule le tirage de deux jetons, renvoyant `True` si une paire est obtenue et `False sinon`.

c) Écrire une fonction Python `rgPremierePaire(n)` d'argument n qui retourne le rang du tirage d'une première paire.

d) Écrire une fonction Python `simulT(n)` d'argument n qui simule la variable T_n, autrement dit qui retourne le nombre de tirages nécessaires pour vider une urne composée de n paires.

e) En supposant qu'on peut faire appel à la fonction `np.mean()` de la bibliothèque `numpy`, comment pourriez-vous utiliser la fonction précédente pour évaluer $\mathbb{E}(T_2)$?

f) En évaluant $\mathbb{E}(T_n)$ pour $1 \leq n \leq 10$ (avec $m = 1000$ répétitions indépendantes) on a obtenu les valeurs suivantes : `[1, 4.038,8.981,16.293,24.913,36.476,49.7646,63.766,80.7876,99.729]`. Conjecturer une formule donnant l'espérance de T_n.

④ On considère l'événement C : « on tire deux jetons identiques lors du premier tirage ».

a) Montrer que $\mathbb{P}(C) = \dfrac{1}{2n-1}$

b) Après avoir préciser avec quel système complet d'événement vous travaillez, montrer grâce à la formule des probabilités totales que : $\mathbb{P}(T_n = k+1) = \dfrac{1}{2n-1}\mathbb{P}(T_{n-1} = k) + \dfrac{2n-2}{2n-1}\mathbb{P}(T_n = k)$

c) En déduire que si T_n admet une espérance, alors $\mathbb{E}(T_n) = \mathbb{E}(T_{n-1}) + 2n - 1$.

d) Cela semble-t-il cohérent avec les résultats du 3.f) ?