Exercice maison : suites numériques

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in]0;\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_{n+1} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

① Montrer que pour tout $n \geq 3$: $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$.

② Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.

③ Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1, puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).

④ Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît strictement à partir du rang n_0. (On utilisera une expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1}).

⑤ Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$? Conclure sur la convergence de (u_n).

⑥ Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$.

⑦ En posant pour $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$, montrer que :

$$(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-n^2}{6}x_n^3, \text{ puis que } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

⑧ En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3}$, vérifier la conjecture faite à la question 7.