CE QU'IL FAUT SAVOIR FAIRE À L'ISSUE DE LA SÉQUENCE...

- *Faire le lien entre les opérateurs $\cap$ et $\cup$ et les connecteurs logiques.*
- *Calculer une probabilité dans un cadre d''équiprobabilité.*
- *Connaître et utiliser les probabilités conditionnelles.*
- *Connaître et utiliser les formules de Bayes, des probabilités composées et des probabilités totales.*
- *Prouver l'indépendance ou l'indépendance mutuelle de deux événements.*

18 Probabilités sur un Univers Fini

Expérience aléatoire, Univers

Définition 1

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat n'est pas connu à l'avance.

Un résultat possible ω de l'expérience aléatoire est appelé issue (ou éventualité).

L'ensemble de toutes les issues est noté Ω et est appelé univers de l'expérience.

Définition 2

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.

Un événement est un élément de $\mathcal{P}(\Omega)$.

Un événement élémentaire est un événement qui n'est réalisé que par une issue.

Confusion fréquente : On confond fréquemment :
• une issue $\omega \in \Omega$
• l'événement élémentaire associé $\{\omega\} \in \mathcal{P}(\Omega)$

Une issue est un ***élément*** *de l'univers. Un événement est toujours une* ***partie*** *de l'univers. En particulier, un événement élémentaire est une partie contenant un unique élément.*

Exemple n° 1

▷ **Expérience 1 :** On lance un dé cubique dont les faces sont des numéros de 1 à 6.

- $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} = [\![1,6]\!]$.
- A : "obtenir un 6" est la partie de Ω : $A = \{6\}$.
- B : "obtenir un nombre pair" est la partie de Ω : $B = \{2,4,6\}$.

▷ **Expérience 2 :** On lance deux dés cubiques, un rouge et un noir.

- $\Omega = \{(i,j) \mid i,j \in [\![1,6]\!]\} = [\![1,6]\!]^2$ est l'ensemble des 2-listes de $[\![1;6]\!]$.
- A : "obtenir un double 6" est la partie de Ω : $A = \{(6,6)\}$.
- B : "obtenir un double" est la partie de Ω :
  $B = \{(i,i) \mid i \in [\![1,6]\!]\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$.
- C : "obtenir au moins un 6" est la partie de Ω :
  $C = ([\![1,6]\!] \times \{6\}) \cup (\{6\} \times [\![1,6]\!])$.

▷ **Expérience 3 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce n fois, avec la convention que "1" représente "pile" et "0" "face".

- $\Omega = \left\{(i_1, i_2, ..., i_n) \mid \forall j \in [\![1;n]\!], i_j \in \{0,1\}\right\} = \{0,1\}^n$ est l'ensemble des n listes de $\{0,1\}$.
- A : "n'obtenir que des piles" est la partie de Ω : $A = \{1\}^n$.
- B : "obtenir un pile au second lancer" est la partie de Ω :
  $B = \{0,1\} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-2}$.
- C : "obtenir au moins un pile" est la partie de Ω :
  $C = \bigcup_{j=1}^{n} (\{0,1\}^{j-1} \times \{1\} \times \{0,1\}^{n-j}) = \Omega \setminus \{(0,...,0)\}$.

▷ **Expérience 4 :** Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs avec remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N.

- $\Omega = [\![1;N]\!]^n$ est l'ensemble des n-listes de $[\![1,N]\!]$..
- Un représentant de Ω est $(i_1, i_2, ..., i_n)$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!], i_j \in [\![1,N]\!]$.
- Par exemple $(1,1,...,1)$.
- A : "ne jamais obtenir la boule N" donne la partie de Ω :
  $A = [\![1,N-1]\!]^n$.
- B : "toujours tirer le même numéro" donne la partie de Ω :
  $B = \cup_{i=1}^{N} \{i\}^n$.

▷ **Expérience 5 :** Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue n tirages successifs sans remise d'une boule, dans une urne de N boules numérotées de 1 à N (dans ce cas, $n \leqslant N$).

- Ω est l'ensemble des n-listes d'éléments distincts de $[\![1,N]\!]$.
- Un représentant de Ω est
  $(i_1, i_2, ..., i_n)$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!], i_j \in [\![1,N]\!]$ et $\forall j \neq k, i_j \neq i_k$.
- Par exemple $(1,2,3,...,n)$.

Exemple n° 2 ▷ **Expérience 6 :** Soit $(n,N) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On effectue un tirage de n boules prises simultanément dans une urne de N boules numérotées de 1 à N (dans ce cas, $n \leqslant N$).

- Ω est l'ensemble des parties à n éléments de $[\![1,N]\!]$.
- Un représentant de Ω est $\{i_1, i_2, ..., i_n\}$ tel que $\forall j \in [\![1,n]\!], i_j \in [\![1,N]\!]$ et $\forall j \neq k, i_j \neq i_k$.
- Par exemple $\{1,2,3,...,n\}$.

Dans chacun des exemples ci-dessus, l'univers comporte un **nombre fini d'issues**.
Dans ce chapitre, on se limitera aux aux univers **finis**. Il existe des expériences aléatoires dont l'univers associé est infini. Nous les aborderons plus tard dans l'année.

Définition 3

Soit Ω un univers fini.

Un événement qui n'est *jamais* réalisé (par aucune issue) s'appelle un <u>événement impossible</u>, on le note $\varnothing$.

Un événement qui est *toujours* réalisé (par toutes les issues) est un <u>événement certain</u>, on le note Ω.

Exemple n° 3 Si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'événements dans un univers fini :

- $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement :
  au moins un des événements A_i est réalisé (A_1 ou A_2 ou ...ou A_n).
- $\displaystyle\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i$ correspond à l'événement :
  les événements A_i sont tous réalisés (A_1 et A_2 et ...et A_n).
- $\displaystyle\overline{\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i} = \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} \overline{A_i}$ correspond à l'événement :
  aucun des événements A_i n'est réalisé.
- $\displaystyle\overline{\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i} = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} \overline{A_i}$ correspond à l'événement :
  au moins un des événements A_i n'est pas réalisé.
- $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} (B\cap A_i) = B \bigcap \left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right)$ correspond à l'événement :
  l'événement B est réalisé, ainsi qu'au moins un des événements A_i.
- $\displaystyle\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} (B\cup A_i) = B \bigcup \left(\bigcap_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right)$ correspond à l'événement :
  l'événement B est réalisé ou tous les événements A_i sont réalisés.

Définition 4 ***(Système complet d'événement)***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]} \in \mathcal{P}(\Omega)$.

On dit que $(A_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ est un <u>système complet d'événements</u> de Ω lorsque :

- les événements A_i sont deux à deux incompatibles :
$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!]^2, i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$
- les événements A_i recouvrent l'espace : $\displaystyle\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i = \Omega$

Remarque

De manière évidente,

- $(\{\omega\})_{\omega\in\Omega}$ est un système complet d'événements de Ω .
- Si $A \subset \Omega$, alors $(A, \overline{A})$ est un système complet d'événements

Propriété 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, Ω un univers fini et $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ un système complet d'événements de Ω . Tout événement $B \in \mathcal{P}(\Omega)$ peut se décomposer en

$$B = \bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i),$$

où les événements $(B \cap A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont incompatibles deux à deux.

Preuve : On a par la définition d'un système complet d'événements et par distributivité :

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i \right) = \bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} (B \cap A_i)\,.$$

De plus, soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Si $i \neq j$, $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = B \cap (A_i \cap A_j) = B \cap \varnothing = \varnothing$ par incompatibilité des A_i. D'où le résultat. □

Notation	Vocabulaire probabiliste	Vocabulaire Ensembliste
ω	issue, ou éventualité	élément
$\{\omega\}$	événement élémentaire	singleton
$\overline{A} = \Omega \setminus A$	événement contraire	complémentaire de A dans Ω
$\varnothing$	événement impossible	ensemble vide
$A \cap B$	A **et** B sont réalisés simultanément	intersection de A et B
$A \cup B$	A ou B est réalisé (ou les deux)	réunion de A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont incompatibles	A et B sont disjoints
$A \subset B$	la réalisation de A entraîne celle de B	A est inclus dans B
$\Omega = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$	(A_i) est un s.c.e de Ω	(A_i) est une partition de Ω

Espaces probabilisés : cas fini

Dans toute la suite du chapitre, Ω désigne un univers fini, et on note $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

DÉFINITION

Définition 5 ***(Probabilité)***

Une probabilité est une application $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{A}$ et à valeur dans $[0,1]$, vérifiant $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et telle que si A et B sont deux événements incompatibles alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ (cette propriété s'appelle additivité de $\mathbb{P}$).

Une conséquence directe de la définition est que pour toute famille d'événements $(A_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ deux à deux incompatibles,

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)\,.$$

Définition 6 ***(Espace probabilisé)***

Si $\mathbb{P}$ est une probabilité, on dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

Propriété 2

Dans un espace probabilisé fini, la probabilité d'un événement est égal à la somme des probabilités des événements élémentaires associés aux issues le réalisant.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $A \subset \Omega$ Alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$$

CAS ÉQUIPROBABLE

Définition 7 ***(Équiprobabilité)***

Soit Ω un univers fini. Lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'on est en situation d'équiprobabilité.

La probabilité d'un événement élémentaire est alors $p = \dfrac{1}{\mathrm{Card}(\Omega)}$

Exemple n°4 On lance un dé équilibré. Le dé étant bien équilibré, il y a équiprobabilité. Comme $\Omega = [\![1;6]\!]$, $\mathrm{Card}(\Omega) = 6$ et la probabilité d'obtenir le numéro $i \in [\![1,6]\!]$ est alors $\frac{1}{6}$.

Exemple n°5 Une urne contient $n \in \mathbb{N}^*$ boules identiques numérotées de 1 à n. On en tire une au hasard. Les boules étant identiques, on peut supposer qu'il y a équiprobabilité sur l'univers $\Omega = [\![1;n]\!]$:

la probabilité de tirer la boule numéro $i \in [\![1,n]\!]$ est alors $\dfrac{1}{n}$.

Propriété 3

Soit Ω un univers fini, et $A \in \mathcal{A}$. Si on a équiprobabilité, alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

... d'où l'importance des **techniques de dénombrement** ...

<u>Exemple</u> n° 6 On lance deux dés équilibrés de couleurs différentes (un noir et un rouge), quelle est la probabilité d'obtenir une somme égale à 6 ?

Les dés étant bien équilibrés, on est dans une situation d'équiprobabilité.
Ici, $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ et est de cardinal 36.
On note A l'événement "obtenir une somme égale à 6". Pour réaliser A, il faut un des tirages suivants (l'ordre est : rouge, puis noir) : $(1, 5)$, $(5, 1)$, $(3, 3)$, $(2, 4)$ et $(4, 2)$.
Donc $\mathbb{P}(A) = \frac{5}{36}$.

$\rightarrow$ *Que se passe-t-il si les dés ont même couleur ?*

Si les dés ont même couleur, il est évident que la probabilité d'obtenir une somme de 6 est inchangée. Toutefois, on a plusieurs choix d'univers. On a alors tout intérêt à modéliser avec un univers dans lequel il y a équiprobabilité en distinguant *arbitrairement* les dés.

Point rédaction

Dans un sujet, l'équiprobabilité peut être annoncée explicitement, ou l'énoncé comporte des éléments (dés bien équilibrés, indiscernables, « au hasard » et ce bien que cette expression n'ait aucun sens sans modèle sous-jacent) permettant de supposer l'équiprobabilité dans notre modèle.
<u>Dans tous les cas</u>, mentionner l'équiprobabilité fait partie de la rédaction attendue pour calculer les probabilités avec les cardinaux. On peut donc suivre le protocole suivant :

- Décrire l'univers Ω et calculer son cardinal
- Expliquer pourquoi on a équiprobabilité
- Décrire l'événement A, et calculer son cardinal
- Calculer la probabilité de l'événement avec la formule $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$

Propriété 4 ***(Lien avec les opérations sur les événements)*** PROPRIÉTÉS

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A, B) \in \mathcal{A}^2$. Alors :

- $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$,
- $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$,
- Si $A \subset B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$,
- $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preuve :

- Comme A et $\overline{A}$ sont incompatibles, l'additivité donne
$$P(A) + P(\overline{A}) = P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1.$$
- Par le point précédent, $P(\varnothing) = P(\overline{\Omega}) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$.
- Comme $A \subset B$, $P(B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$, où on peut utiliser l'additivité car $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. D'où le résultat.
- $P(A \cup B) = P(A \cup (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$, par additivité, car $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$. Donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus (A \cap B)) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ par le point précédent, car $A \cap B \subset B$.

$\square$

Propriété 5 ***(Formule de Poincaré)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{A}^3$. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) \\ &- \mathbb{P}(A_1 \cap A_2) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_3) - \mathbb{P}(A_2 \cap A_3) \\ &+ \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)\,.\end{aligned}$$

Preuve :

Les formules d'additivité et de distributivité donnent :

$$\begin{aligned}P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= P(A_1 \cup A_2) + P(A_3) - P((A_1 \cup A_2) \cap A_3) \\ &= (P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)) + P(A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \\ &= P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) + P(A_3) - (P(A_1 \cap A_3) + P(A_2 \cap A_3) - P((A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3))) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$

$\square$

Exemple n° 7 Une classe contient 30 élèves, qui étudient tous une ou plusieurs langues. On sait que 25 élèves étudient l'anglais, 12 l'allemand et 8 l'espagnol. Par ailleurs, 8 élèves étudient à la fois l'allemand et l'anglais, 6 à la fois l'espagnol et l'anglais et 2 à la fois l'allemand et l'espagnol.

On choisit un élève aléatoirement. Quelle est la probabilité qu'il étudie les trois langues ?

On note
A l'événement "l'élève étudie l'anglais",
B l'événement "l'élève étudie l'allemand"
E l'événement "l'élève étudie l'espagnol".

Les hypothèses donnent alors :

$$P(A) = \frac{25}{30}, \quad P(B) = \frac{12}{30}, \quad P(E) = \frac{8}{30}, \quad P(A\cap B) = \frac{8}{30},$$
$$P(A\cap E) = \frac{6}{30} \quad \text{et} \quad P(E\cap B) = \frac{2}{30}.$$

La formule de Poincaré donne :

$$\begin{aligned} P(A\cap B\cap E) &= P(A\cup B\cup E) - P(A) - P(B) - P(E) \\ &\quad + P(A\cap B) + P(A\cap E) + P(B\cap E). \end{aligned}$$

D'où

$$P(A\cap B\cap E) = \frac{30-25-12-8+8+6+2}{30} = \frac{1}{30}.$$

Propriété 6 ***(Croissance de $\mathbb{P}$)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
$\mathbb{P}$ est une application croissante (au sens de l'inclusion) :

$$\forall (A,B) \in \mathcal{A}^2, \quad A \subset B \Longrightarrow \mathbb{P}(()\, A) \leqslant \mathbb{P}(B)\,.$$

Preuve : Soit $(A,B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A \subset B$.
On a alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(()\, B) - \mathbb{P}(A)$.
Comme de plus $\mathbb{P}$ est positive, on trouve $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B\setminus A) + \mathbb{P}(A) \geqslant \mathbb{P}(A)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Exemple n° 8 On effectue une succession de pile ou face. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose A_n l'événement « il y a au moins trois pile dans les n premiers lancers » et $u_n = \mathbb{P}(A_n)$.

Montrer que la suite u est convergente.

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \subset A_{n+1}$. En effet, s'il y a au moins trois pile dans les n premiers lancers, il y en aura aussi au moins trois dans les $n+1$ premiers lancers. Donc par croissance de la probabilité, $u_n = P(A_n) \leqslant P(A_{n+1}) = u_{n+1}$. Ce qui signifie que la suite u est croissante.
Or u est également majorée par 1 (c'est une suite de probabilités).
Elle est donc croissante et majorée, c'est une suite convergente d'après le TLM.

Propriété 7 ***(Lien entre probabilité et système complet d'événements)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $n \in \mathbb{N}^*$.
Si $(A_1, ..., A_n)$ est un système complet d'événements de Ω, alors

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) = 1.$$

Preuve : Il suffit d'utiliser successivement les caractéristiques du système complet d'événements et l'additivité de $\mathbb{P}$:

$$1 = P(\Omega) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)\,.$$

□

Probabilités conditionnelles

Définition 8 ***(Probabilité conditionnelle)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $B \in \mathcal{A}$ tel que $\boxed{\mathbb{P}(B) \neq 0}$.

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

$\mathbb{P}(A \mid B)$ est <u>la probabilité de A sachant B</u>.

Variante

On rencontre parfois la notation $P_B(A)$ à la place de $\mathbb{P}(A \mid B)$.

Propriété 8

Avec les hypothèses de la définition précédente, on peut reformuler la définition en :

$$\forall A \in \mathcal{A}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(A \mid B)$$

Heuristique

C'est une formule « qui se lit dans l'arbre »

Propriété 9 ***(Formule des probabilités composées)*** FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé.
$n \in \mathbb{N}^*$
$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'événements de $\mathcal{A}$ telle que $\mathbb{P}(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$.

Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2 \mid A_1)\,\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \times \ldots \times \mathbb{P}(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Preuve :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $H(n)$:
« $\forall\, (A_i)_{i\in[\![1,n]\!]} \in \mathcal{A}^n$ tel que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \neq 0$,
$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n)$ ».

- $\forall A_1 \in \mathcal{A}$, $P(A_1) = P(A_1)$, donc $H(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $H(n)$ est vraie.
  Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n+1]\!]} \in \mathcal{A}^{n+1}$ tel que $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$.
  On applique $H(n)$ à $(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}, (A_n \cap A_{n+1}))$ (c'est possible car par croissance de P, $P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \geqslant P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$. Cette probabilité est donc bien non nulle) :

  $$P(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap (A_n \cap A_{n+1})) = P(A_1)\, P_{A_1}(A_2)\, P_{A_1\cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1})\,.$$

  Or par définition de la probabilité conditionnelle, comme $P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \neq 0$,

  $$P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n \cap A_{n+1}) = P_{A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}}(A_n) P_{(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})\cap A_n}(A_{n+1}).$$

  En remplaçant dans l'expression précédente, on trouve que $H(n+1)$ est vraie.
- D'après le principe de récurrence, $H(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

RQ : pour l'hérédité, on aurait également pu appliquer $H(n)$ à $((A_1 \cap A_2), A_3 \ldots, A_n, A_{n+1})$.

<u>Exemple</u> n° 9 On tire trois fois de suite, sans remise, dans une urne composée de 7 boules blanches et 6 rouges. Pour $i \in [\![1, 3]\!]$,
on pose : B_i : « le i-ème tirage donne une boule blanche »
R_i :« le i-ème tirage donne une boule rouge ».

Calculer $\mathbb{P}(B_1 \cap B_2 \cap R_3)$.

Comme $P(B_1 \cap B_2) \neq 0$ (il y a plus de deux boules blanches, il est donc possible de commencer par en tirer deux), la formule des probabilités composées donne :

$$P(B_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(B_1)P_{B_1}(B_2)P_{B_1\cap B_2}(R_3) = \frac{7}{13} \times \frac{6}{12} \times \frac{6}{11} = \frac{21}{143}.$$

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Propriété 10 ***(Formule des probabilités totales)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé
$I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'événements de Ω.

Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)\,.$$

Preuve : On décompose l'événement B sur le système complet d'événements $(A_i)_{i\in I}$:

$$B = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)\,,$$

et les $(B \cap A_i)$ sont incompatibles deux à deux.
L'additivité de la probabilité donne alors le résultat. □

Propriété 11 ***(Formule des probabilités totales, version $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé
$I \subset \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i\in I}$ un s.c.e de Ω tel que, pour tout $i \in I$, $\mathbb{P}(A_i) \neq 0$.

Alors pour tout $B \in \mathcal{A}$, $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)\,\mathbb{P}(B \mid A_i)\,.$$

Preuve : On applique la première version de la formule des probabilités totales :

$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B \cap A_i)\,.$$

Par définition de la probabilité conditionnelle,
Pour tout $i \in I$, comme $P(A_i) \neq 0$, $\quad P(B \cap A_i) = P(A_i)\, P_{A_i}(B)$.
En remplaçant cette expression dans la formule précédente, on obtient le résultat souhaité. □

En particulier pour tout $(A, B) \in \mathcal{A}^2$:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}\left(\overline{A} \cap B\right),$$

et si de plus $\mathbb{P}(A) \in]0;1[$,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right).$$

Toutes ces formules « se lisent dans l'arbre »

Exemple n° 10 On considère trois urnes U_1, U_2 et U_3. On choisit une urne au hasard, et on pioche une boule dedans. On suppose que $\forall i \in [\![1,3]\!]$, l'urne U_i contient i boules blanches et 3 boules noires.

Quelle est la probabilité que la boule piochée soit noire ?

On note A l'événement "piocher une boule noire" et,
pour $i \in [\![1,3]\!]$, B_i l'événement "piocher dans l'urne U_i".

(B_1, B_2, B_3) forme un système complet d'événements et ces trois événements sont de probabilité non nulle, on peut donc appliquer la formule des probabilités totales :

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A)$$
$$P(A) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60}.$$

Propriété 12 ***(Formule de Bayes)*** FORMULE DE BAYES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(A) \in]0,1[$.
Pour tout $B \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbb{P}(B) \neq 0$,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A)}{\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B \mid A) + \mathbb{P}\left(\overline{A}\right)\mathbb{P}\left(B \mid \overline{A}\right)}.$$

Preuve : (D.A.C)
Par définition du conditionnement, comme $P(B) \neq 0$ et $P(A) \neq 0$,

$$P_B(A)\,P(B) = P(A \cap B) = P(A)\,P_A(B)\,.$$

Il suffit ensuite de diviser par $P(B) \neq 0$ pour obtenir l'égalité annoncée.

Pour obtenir la deuxième égalité, on applique la formule des probabilités totales, deuxième version, avec le système complet d'événements $(A, \overline{A})$ (qui vérifie bien $P(A) \neq 0$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A) \neq 0$) :

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B).$$

Il suffit alors de remplacer $P(B)$ par cette nouvelle expression au dénominateur de la première égalité pour obtenir la deuxième égalité. □

C'est une combinaison des formules vues précédemment.
Plutôt que de l'apprendre « telle qu'elle », vous la mémoriserez mieux et la comprendrez mieux en apprenant à la redémontrer à partir des formules vues précédemment.

Faire un arbre !

<u>*Exemple*</u> *n° 11* Un laboratoire propose un test de dépistage d'une maladie, qui touche une personne sur $100\ 000$:

- lorsque le test est appliqué à une personne malade, il est positif dans 99,8% des cas.
- lorsqu'il est appliqué à une personne saine, il est négatif dans 99,6% des cas.

<u>Sachant que le test est positif, quelle est la probabilité que la personne soit réellement malade ?</u>

On note M l'événement "la personne est malade" et
T l'événement "le test est positif".

L'énoncé nous donne :

$$P_M(T) = 0,998 \quad P_{\overline{M}}(\overline{T}) = 0,996 \quad P(M) = \frac{1}{100000},$$

La formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(M, \overline{M})$ donne :

$$\begin{aligned}
&P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T)\\
&P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T) \text{ car } P(M) \in]0,1[\\
&P(T) = 0,00001 \times 0,998 + 0,99999 \times (1 - 0,996)\\
&P(T) = 0,00400994 \neq 0
\end{aligned}.$$

On obtient alors par la formule de Bayes (comme $P(T) \neq 0$ et $P(M) \neq 0$) :

$$\begin{aligned}
&P_T(M) = \frac{P(M)P_M(T)}{P(T)}\\
&P_T(M) = \frac{0,00001 \times 0,998}{0,00400994}\\
&P_T(M) = \frac{0,00000998}{0,00400994}\\
&P_T(M) = 0,0025
\end{aligned}.$$

Donc même si le test est positif, il y a très peu de chances que la personne soit malade ($0,25\%$).
Ce résultat contre-intuitif est dû au nombre très faible de personnes malades dans la population.

Indépendance

DÉFINITION

Définition 9 ***(Indépendance)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$.
On dit que A et B sont <u>indépendants</u> lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,.$$

- **L'indépendance ne peut se juger qu'en rapport à la probabilité.**
  A et B sont indépendants <u>pour</u> $\underline{\mathbb{P}}$ lorsque
  $$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,.$$
- **L'incompatibilité est une notion ensembliste, qui ne dépend pas de la probabilité.**
  A et B sont incompatibles lorsque
  $$A \cap B = \varnothing,$$
  et on a alors (mais c'est une conséquence) : $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

<u>Exemple</u> n° 12 On dispose de deux pièces, une équilibrée et une truquée. On lance un dé équilibré à 6 faces :

- si on obtient le chiffre 1, on lance deux fois la pièce équilibrée ;
- si on obtient un chiffre différent de 1, on lance deux fois la pièce truquée (pile avec probabilité $\frac{1}{3}$).

On note
A : « obtenir pile au premier lancer de la pièce »,
B : « obtenir pile au second lancer de la pièce »
C : « le lancer du dé donne le chiffre 1 ».

<u>Étudier l'indépendance de A et B pour $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}_C$.</u>

Si C est réalisé, on sait que c'est la pièce équilibrée qui est utilisée.

$$\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \tfrac{1}{4}$$
$$\mathbb{P}(A \mid C)\,\mathbb{P}(B)\,C = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4}$$

donc $\mathbb{P}(A \cap B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C)\,\mathbb{P}(B \mid C)$ et il y a indépendance de A et B pour $\mathbb{P}_C$.

La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(C, \overline{C})$ (qui vérifie bien $\mathbb{P}()\,(C) \in]0,1[)$ donne :

$$P(A \cap B) = P(C)P_C(A \cap B) + \mathbb{P}()\,(\overline{C})P_{\overline{C}}(A \cap B)$$
$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{9}$$
$$P(A \cap B) = \frac{29}{6^3}$$

$$P(B) = P(A)$$
$$P(B) = P(C)P_C(A) + P(\overline{C})P_{\overline{C}}(A)$$
$$P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{3}$$
$$P(B) = \frac{13}{6^2}$$

Donc $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{13^2}{6^4} \neq \mathbb{P}(A \cap B)$.
Finalement, A et B ne sont pas indépendants pour $\mathbb{P}$.

ATTENTION, ne pas confondre INDÉPENDANCE et INCOMPATIBILITÉ :

Propriété 13 ***(Indépendance et probabilité conditionnelle)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$.
Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \mid A).$$

Preuve :

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a les équivalences :

$$\begin{aligned} P(B) = P_A(B) &\iff P(B)P(A) = P_A(B)P(A) \\ &\iff P(B)P(A) = P(A \cap B) \end{aligned}$$

Cette propriété donne tout son sens à la notion d'indépendance.
Savoir (ou pas) si A est réalisé ne change pas la probabilité de réalisation de B (qui est donc bien indépendant de A)
Pourquoi n'a-t-on pas choisi ceci comme *définition* ? La définition convient à *tous* les cas (y compris les événements impossibles)

Propriété 14 ***(Complémentaire et indépendance)***

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$.
Les assertions suivantes sont équivalentes :

- A et B sont indépendants.
- A et $\overline{B}$ sont indépendants.
- $\overline{A}$ et B sont indépendants.
- $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Preuve :

On va montrer que (A et B indépendants) implique (A et $\overline{B}$ indépendant), toutes les équivalences en découlent ensuite directement.

Supposons donc que A et B sont indépendants. Alors

$$\begin{aligned} P(A)P(\overline{B}) &= P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A) - P(A)P(B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A \cap \overline{B}), \end{aligned}$$

la dernière égalité vient de $A \cap B \subset A$ et $P(A \cap \overline{B}) = P(A \setminus (A \cap B))$ (on pouvait également calculer $P(A)$ avec la FPT dans le s.c.e $(B, \overline{B})$.
Donc A et $\overline{B}$ sont indépendants. D'où le résultat. $\square$

Définition 10 ***(Indépendance d'une famille)*** INDÉPENDANCE D'UNE FAMILLE

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une **famille d'événements mutuellement indépendants** si

$$\text{pour tout } J \subset [\![1,n]\!], \quad \mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in J} A_k\right) = \prod_{k\in J} \mathbb{P}(A_k)\,.$$

ATTENTION : vérifier $\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k)$ n'est pas suffisant.
Il ne suffit pas plus de vérifier que les événements sont indépendants deux à deux.

Exemple n° 13 On effectue un lancer de Pile ou Face.
Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui vérifient $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B)\,\mathbb{P}(C)$, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

Il suffit de choisir un événement impossible pour A, et $B = C$.
On pose par exemple A :"ne tirer ni pile ni face", $B = C$ ="tirer pile", et on a :

$$P(A \cap B \cap C) = P(\varnothing) = 0 = 0 \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = P(A)P(B)P(C).$$

Il n'y a pourtant pas indépendance mutuelle car B et C ne sont pas indépendants :

$$P(B \cap C) = P(B) = \tfrac{1}{2} \neq \tfrac{1}{4} = P(B)P(C)\,.$$

Exemple n° 14 On lance deux fois une pièce équilibrée.
Déterminer une famille d'événements (A, B, C) qui sont indépendants deux à deux, mais qui ne forment pas une famille d'événements mutuellement indépendants.

On pose
- A : "le premier lancer donne pile",
- B : "le deuxième lancer donne pile", et
- C : "les deux lancers donnent le même résultat".
- pour $i = 1$ ou 2, F_i : "le i-ème lancer donne face.

Alors $P(A) = P(\overline{F_1}) = \dfrac{1}{2}$, $P(B) = P(\overline{F_2}) = \dfrac{1}{2}$

et $P(C) = P((F_1 \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})) = \dfrac{1}{2}$ (par dénombrement direct ou en remarquant que les événements de l'union sont incompatibles et les lancers sont indépendants).

On a de plus :

- $P(A \cap B) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$, donc A et B sont indépendants.
- $P(A \cap C) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$, donc A et C sont indépendants.
- $P(B \cap C) = P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$, donc B et C sont indépendants.

Par contre, $P(A \cap B \cap C) = P(F_1 \cap F_2) = \dfrac{1}{4} \neq \dfrac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$.
Donc il ne s'agit pas d'une famille d'événements mutuellement indépendants.

Exercices

exercice 1 Soit $n \geqslant 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n et indiscernables au toucher. On tire simultanément, et sans remise 3 boules de cette urne. Quelle est la probabilité que le plus petit numéro sorti soit 2 ? Pour quelle valeur de n cette valeur est-elle maximale ?

Proposition de corrigé :
On choisit comme univers Ω l'ensemble des parties à 3 éléments de $[\![1;n]\!]$.
Ainsi, $\text{Card}(\Omega) = \binom{n}{p}$

Notons A l'événement : « le plus petit numéro est 2 ». $A = \{\{2,a,b\} \ \mid \{a,b\} \subset [\![3;n]\!]\}$. Ainsi, il y a autant d'élements dans A que de parties à 2 élements dans $[\![3;n]\!]$, soit $\binom{n-2}{2}$.

Les différentes issues étant équiprobables, on a

$$P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{\binom{n-2}{2}}{\binom{n}{3}} = \frac{(n-2)!}{2!(n-4)!} \times \frac{3!(n-3)!}{n!} = \frac{3(n-3)}{n(n-1)}$$

$\boxed{\text{La probabilité que le plus petit numéro soit 2 est } \dfrac{3(n-3)}{n(n-1)}}$

Notons p_n cette probabilité. Pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$p_{n+1} - p_n = \frac{3}{n}\left(\frac{n-2}{n+1} - \frac{n-3}{n-1}\right) = \frac{3(5-n)}{n(n-1)(n+1)}$$

On remarque que $p_3 < p_4 < p_5$, puis $p_5 = p_6$ et enfin $p_k < p_6$ pour tout $k > 6$.

$\boxed{\text{Le maximum est atteint pour } n = 5 \text{ ou } n = 6. \text{ La probabilité d'obtenir un minimum de 2 vaut alors } \frac{3}{20}.}$

On peut aussi étudier les variations de $x \mapsto \frac{x-3}{x(x-1)}$

exercice 2 Sur 100 billets de loterie 2 sont gagnants. Quelle est la probabilité de gain la plus élevée : participer 4 fois successivement à 4 loteries ou prendre 4 billets d'un coup ?

Proposition de corrigé :
Pour les deux scénarii, nous noterons G l'événement : « L'un des billets est gagnant »

- Dans le premier scénario, l'univers Ω_1 est l'ensemble des 4-listes d'éléments de l'ensemble des 100 billets. $\text{Card}(\Omega) = 100^4$. $\overline{G}$ est réalisé par réalisé par les 98^4 4-listes de billets perdants.

$$\boxed{P(G) = 1 - \left(\frac{98}{100}\right)^4 \approx 0,0776}$$

- Dans le second scénario, l'univers Ω_2 est l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble des 100 billets. $\text{Card}(\Omega_2) = \binom{100}{4}$.

$\overline{G}$ est réalisé par réalisé par les $\binom{98}{4}$ parties à 4 éléments de l'ensemble des 98 billets perdants.

$$\boxed{P(G) = 1 - \frac{\begin{pmatrix}98\\4\end{pmatrix}}{\begin{pmatrix}100\\4\end{pmatrix}} = 1 - \frac{\frac{98!}{4!94!}}{\frac{100!}{4!96!}} = 1 - \frac{95 \times 96}{99 \times 100} \approx 0,0788}$$

exercice 3 Une urne contient 3 boules rouges et 3 boules blanches.
On tire deux boules au hasard, que l'on met dans un sac. Puis on tire au hasard une de ces deux boules.

1. Quelle est la probabilité qu'elle soit rouge ?
2. Sachant qu'elle l'est, quelle est la probabilité que la boule encore dans le sac le soit aussi ?

Proposition de corrigé :

Notons R l'événement « la boule tirée à la fin est rouge ».
Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules rouges dans le sac avant le tirage final.
La famille $\{[X=0],[X=1],[X=2]\}$ forme un système complet d'événements de l'univers.
$[X=0]$ est réalisé si on tire deux boules blanches parmi les trois et
$P(X=0)=\dfrac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}}=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$.
$[X=2]$ est réalisé en tirant deux boules rouges et, de même, $P(X=2)=\frac{1}{5}$
$P(X=1)=1-P(X=2)-P(X=0)=\frac{3}{5}$

Ainsi, $P(R)=P(X=0)P_{[X=0]}(R)+P(X=1)P_{[X=1]}(R)+P(X=2)P_{[X=2]}(R)=\frac{1}{5}\times 0+\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\times 1=\frac{3}{10}+\frac{2}{10}$
$P(R)=\frac{5}{10}$ $\boxed{P(R)=\frac{1}{2}}$

> **remarque :** pour les notations, on aurait pu se passer de variable aléatoire et en utiliser d'autres. Par exemple S_0, S_1 et S_2 pour le nombre de boules dans le sac.

exercice 4 Soit n un entier naturel non nul. Dans un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, on note A et B deux événements de probabilité non nulle.

1. On suppose que $\mathbb{P}(A\mid B)\leqslant\mathbb{P}(A)$. Comparer $\mathbb{P}(B\mid A)$ et $\mathbb{P}(B)$.

2. Une boite contient des boules indiscernables, numérotés de 1 à $2n$.
Benoît en tire une au hasard et sans remise puis Gilles en tire une à son tour. Gilles obtient un numéro compris entre $n+1$ et $2n$.
La probabilité que Benoît ait obtenu un numéro compris entre $n+1$ et $2n$ est-elle supérieure, égale ou inférieure à $\frac{1}{2}$?

Proposition de corrigé :

1. A et B étant de probabilité non nulle, on a : $P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$
Ainsi, $\dfrac{P_A(B)}{P(B)}=\dfrac{P_B(A)}{P(A)}$ et $P_B(A)\leqslant P(A)\iff P_A(B)\leqslant P(B)$
Conclusion : Comme par hypothèse $P_B(A)\leqslant P(A)$, il vient $\boxed{P_A(B)\leqslant P(B)}$

2.
Notons A : « Gilles obtient un numéro dans $[\![n+1;2n]\!]$ » et
B : « Benoît obtient un numéro dans $[\![n+1;2n]\!]$ »
Comme il y a au total $2n$ boules, n boules dans $[\![1;n]\!]$ et n boules dans $[\![n+1;2n]\!]$,
on a $P(B)=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$ et $P_B(A)=\frac{n-1}{2n-1}<\frac{1}{2}$.
De plus, $\{B,\overline{B}\}$ est un s.c.e et la formule des probabilités totales donne :
$P(A)=P(B)P_B(A)+P(\overline{B})P_{\overline{B}}(A)=\dfrac{1}{2}\dfrac{n-1}{2n-1}+\dfrac{1}{2}\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{2}$
Ainsi, $P_B(A)\leqslant P(A)$.
Le résultat précédent permet d'affirmer que $P_A(B)\leqslant P(B)$ soit $\boxed{P_A(B)\leqslant\dfrac{1}{2}}$
En fait, on a inégalité stricte car le raisonnement de la question 1. reste valide avec une inégalité stricte

exercice 5 Soit A et B deux événements tels que $P(A) = P(B) = \frac{3}{4}$.
Quelles sont les valeurs possibles pour $P(A \cap B)$?

Proposition de corrigé :

Comme $A \subset A \cup B \subset \Omega$,
$$\begin{aligned}
\frac{3}{4} \leqslant & \quad P(A\cup B) & \leqslant 1\\
-1 \leqslant & \quad -P(A\cup B) & \leqslant -\frac{3}{4}\\
-1+\frac{3}{4}+\frac{3}{4} \leqslant & \quad P(A)+P(B)-P(A\cup B) & \leqslant -\frac{3}{4}+\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\\
\frac{1}{2} \leqslant & \quad P(A\cap B) & \leqslant \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

---

exercice 6 Le chef de rayon d'un supermarché sait que 5% des emballages d'un lot de paquets de gateaux sont abîmés. Il estime que 60% des boîtes abîmées contiennent au moins un biscuit abîmé, et que 98% des boîtes en bon état contiennent des gateaux tous en bon état. On suppose de plus que les états des diverses boîtes sont indépendants les uns des uatres.

Un client achète une boîte de ce lot.
On désigne par A l'événement « la boîte achetée est abîmée »
et par G l'événement « au moins un gâteau est abîmé dans la boîte ».

1. Donner les probabilités des événements $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$, $\mathbb{P}(A)\, G$, $\mathbb{P}\left(G \mid \overline{A}\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{G} \mid A\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{G} \mid \overline{A}\right)$

2. Calculer $\mathbb{P}(G)$

3. Le client constate qu'un des gateaux est cassé. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté une boîte abîmée ?

Proposition de corrigé :

1. D'après l'énoncé,
   $\mathbb{P}(()\, A) = \frac{5}{100}$; $\mathbb{P}()_A\,(G) = \frac{60}{100}$; $\mathbb{P}()_{\overline{A}}\,(\overline{G}) = \frac{98}{100}$.

   De plus, on a :
   $\mathbb{P}(()\, \overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(()\, A) = \frac{95}{100}$; $\mathbb{P}()_A\,(\overline{G}) = 1 - \mathbb{P}()_A\,(\overline{G}) = \frac{40}{100}$; $\mathbb{P}()_{\overline{A}}\,(G) = 1 - \mathbb{P}()_{\overline{A}}\,(\overline{G}) = \frac{2}{100}$.

2. Comme $P(A) \in]0;1[$, la formule des probabilités totales donne :
$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(()\, G) &= \mathbb{P}(()\, A)\mathbb{P}()_A\,(G) + \mathbb{P}(()\, \overline{A})\mathbb{P}()_{\overline{A}}\,(G)\\
&= \frac{5}{100}\times\frac{60}{100} + \frac{95}{100}\times\frac{2}{100}\\
&= \frac{30}{1000} + \frac{19}{1000}\\
&= \frac{49}{1000}
\end{aligned}$$
$$\boxed{\mathbb{P}(()\, G) = 0,049}$$

3. $\mathbb{P}()_G\,(A) = \dfrac{\mathbb{P}(()\, A\cap G)}{\mathbb{P}(()\, G)} = \dfrac{\mathbb{P}(()\, A)\mathbb{P}()_A\,(G)}{\mathbb{P}(()\, G)} = \dfrac{\frac{60}{100}\times\frac{5}{100}}{\frac{49}{1000}} = \dfrac{30}{49}.$
$$\boxed{\mathbb{P}()_G\,(A) = \frac{30}{49}}$$

exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes $U_1, U_2, ..., U_n$.
L'urne U_k contient k boules blanches et $n+1-k$ boules noires, pour $1 \leqslant k \leqslant n$.
On choisit une urne et on tire une boule de celle-ci. On suppose les boules de chaque urne indiscernables au toucher.
Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$, la probabilité de choisir l'urne U_k est αk^2 où α est un réel.

1. Déterminer α.
2. Déterminer la probabilité de tirer une boule noire.

__Proposition de corrigé__ :

1. La famille $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ forme un système complet d'événements.

   Ainsi, $1 = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(()\,U_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha k^2$

   d'où $\alpha \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = 1$ et

   $$\boxed{\alpha = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}}$$

2. Notons N l'événement « tirer une boule noire ».
   La formule des probabilités totales, avec le s.c.e $(U_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$, donne :

$$\mathbb{P}(()\,\overline{N}) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(()\,U_k)\mathbb{P}()_{U_k}(\overline{N})$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha k^2 \frac{k}{n+1}$$

$$= \frac{\alpha}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

$$= \frac{\alpha}{n+1} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{6}{n(n+1)^2(2n+1)} \times \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

d'où $\mathbb{P}(()\,N) = 1 - \frac{3n}{2(2n+1)} = \frac{n+2}{4n+2}$ puis

$\boxed{\mathbb{P}(()\,N) = \frac{n+2}{4n+2}}$.

Remarque 1 : Ici, le choix de $\overline{N}$ est guidé par la facilité de calcul. On pouvait tout à fait calculer directement $\mathbb{P}(()\,N)$, utiliser la linéarité de la somme...

Remarque 2 : Prenez l'habitude de « tester » la cohérence de votre résultat. Ici, par exemple, on peut vérifier rapidement qu'on a bien $\mathbb{P}(()\,N) \in [0;1]$.

Bonus ci-dessous : Programme simulant l'expérience aléatoire pour l'évaluation de la probabilité par échantillonnage.

```
n = 20
N = 100000 // on fixe un nombre de répétitions
R = 0 // initialisation d'un "compteur résultats"
alpha = n*(n+1)*(2*n+1)/6

for i = 1:N
  d = floor(alpha*rand()+1)
  k = 0
  while k*(k+1)*(2*k+1) < 6*d
    k = k+1
  end
  R = R + (floor((n+1)*rand()+1)>k)
end

disp(R/N)
disp((n+2)/(4*n+2))
```

exercice 8 *(Chaîne de Markov)*

On considère un mobile qui se déplace sur les sommets d'un triangle A_1 , A_2 et A_3. On suppose qu'initialement le mobile se trouve en A_1. Ensuite les déplacements s'effectuent de la manière suivante : si le mobile est en A_i, il passe en $A_j (j \neq i)$ avec la probabilité $\frac{2}{5}$ dans les deux cas. et il reste en A_i avec la probabilité $\frac{1}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit les événements :

- U_n :« après n déplacements le mobile se trouve en A_1 » ;
- V_n : « après n déplacements le mobile se trouve en A_2 » ;
- W_n : « après n déplacements le mobile se trouve en A_3 ».

On pose $u_n = P(U_n)$, $v_n = P(V_n)$ et $w_n = P(W_n)$.

1. Déterminer u_0 , v_0 et w_0 .
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} \qquad \text{avec } A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}$.
4. Exprimer A en fonction de I et J. En déduire l'expression de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. En déduire l'expression de u_n , v_n et w_n en fonction de n , pour tout entier n .
6. Quelles sont les limites des suites (u_n), (v_n) et (w_n) ?

Proposition de corrigé :

1. Il est certain qu'initialement le mobile est en A_1. Ainsi, $u_0 = 1$ et $v_0 = w_0 = 0$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{U_n; V_n; W_n\}$ est un système complet d'événement (de probabilités non nulles) et la formule des probabilités totales donne :

$$P(U_{n+1}) = P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(V_n)P_{V_n}(U_{n+1}) + P(W_n)P_{W_n}(U_{n+1})$$

$$\text{d'où } u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n$$

$$\text{un raisonnement similaire donne } v_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}v_n + \frac{2}{5}w_n$$

$$\text{et } w_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{2}{5}v_n + \frac{1}{5}w_n$$

Comme le résultat précédent est également vrai pour $n = 0$, on a bien : Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}}$$

3. $J^0 = I_3$.
Montrons par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $J^n = 3^{n-1}J$.
• Pour $n = 1$, on a bien $J^1 = J = 3^0 J$.
• Supposons que pour un $n \geqslant 1$ donné, on ait $J^n = 3^{n-1}J$.
Alors $J^{n+1} = J^n \times J$ et, par hypothèse de récurrence, on a :
$J^{n+1} = 3^{n-1}J \times J = 3^{n-1} \times 3J$ car $J^2 = 3J$
Ainsi, $J^{n+1} = 3^{(n+1)-1}J$ ce qui prouve l'hérédité.
• D'après le principe de récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, $J^n = 3^{n-1}J$

4. $A = \frac{1}{5}(2J - I)$ donc $A^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n (2J-I)^n$. Puisque I et J commutent, la formule du binôme de Newton donne :
$$\begin{aligned}(2J-I)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2J)^k (-I)^{n-k} \\ &= \binom{n}{0}(2J)^0(-I)^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} 2^k J^k (-1)^{n-k} \\ &= (-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}2^k 3^{k-1}(-1)^{n-k}\right) J \text{ d'après 3. et par linéarité} \\ &= (-1)^n I + \left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}\right) J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\left[\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^k(-1)^{n-k}\right) - (-1)^n\right] J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\left[(6-1)^n - (-1)^n\right] J \\ &= (-1)^n I + \frac{1}{3}\left[5^n - (-1)^n\right] J\end{aligned}$$
Vérifier rapidement pour $n \in \{0; 1; 2\}$ pour débusquer les éventuelles erreurs de signe, calcul...

Ainsi, $A^n = \left(\frac{-1}{5}\right)^n I + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right] J$

5. Une récurrence immédiate donne que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve alors :
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \left(\frac{-1}{5}\right)^n I \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right] J \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \left(\frac{-1}{5}\right)^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n\right] \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n + \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{-1}{5}\right)^n \end{pmatrix} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

exercice 9 Soit $n = 2p$ un nombre pair. Une urne contient 1 boule numérotée 1, 2 boules numérotées 2, etc, et n boules numérotées n. On tire 2 boules et on gagne si elles ont la même parité. Est-t-il plus avantageux de procéder à un tirage avec ou sans remise ?

Proposition de corrigé :
Quand on a tiré une boule,
- le nombre de boules de même parité a diminué.
- avec remise, on a une boule de même parité en plus que précédemment, plus de chances d'obtenir une deuxième boule de même parité.

version plus carrée
Il faut résister à la tentation de tout calculer ici. Notons N le nombre total de boules (il y en a $\frac{n(n+1)}{2}$ mais c'est sans importance). Notons I le nombre de boules impaires il y a alors $N - I$ boules paires.

Dans les deux cas, on note A l'événement :« tirer deux boules de même parité ». A est réunion disjointe de l'ensemble des tirages de deux boules impaires et des tirages de deux boules paires.

avec remise, l'univers est l'ensemble des 2-listes de l'ensemble des N boules. Il y a équiprobabilité et $\mathrm{Card}(\Omega) = N^2$. Pour dénombrer A, il y a I^2 tirages de boules impaires et $(N-I)^2$ tirages de boules paires donc
Ainsi, $\mathrm{Card}(A) = I^2 + (N-I)^2$

$$p_1(A) = \frac{I^2 + (N-I)^2}{N^2} = \frac{N^2 + 2I^2 - 2NI}{N^2}$$

sans remise : l'univers est l'ensemble des 2-listes d'éléments distincts de l'ensemble des N boules. Il y a également équiprobabilité. Pour dénombrer A, il y a $I(I-1)$ tirages de boules impaires et $(N-I)(N-I-1)$ tirages de boules paires.
Sans remise, la probabilité de tirer deux boules de même parité est

$$p_2(A) = \frac{I(I-1) + (N-I)(N-I-1)}{N(N-1)} = \frac{N^2 + 2I^2 - 2NI - \mathbf{N}}{N^2 - \mathbf{N}}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $(0 < k \leqslant a < b)$.

$$\frac{a-k}{b-k} - \frac{a}{b} = \frac{b(a-k) - a(b-k)}{b(b-k)} = \frac{k(a-b)}{b(b-k)} < 0 \text{ donc } \frac{a-k}{b-k} < \frac{a}{b}$$

Or, précédemment, on a $k = N > 0$, $b = N^2$ et $a = N^2 + 2I^2 - 2NI = I^2 + (N-I)^2 > I + (N-I) = k$ (l'inégalité est stricte car $I > 1$ et $N - I > 1$), on a bien $0 < k \leqslant a < b$ et finalement $p_1 > p_2$

$\boxed{\text{Il est plus avantageux d'effectuer un tirage avec remise.}}$

exercice 10 On dispose d'un stock de 100 dés dont 25 sont pipés, les autres sont bien équilibrés. Pour un dé pipé, la probabilité d'obtenir 6 est $\frac{1}{2}$. On tire un dé au hasard dans le stock (que l'on suppose parfaitement mélangé), on le jette et on obtient un 6.
Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Proposition de corrigé :
Notons T l'événement « Le dé est truqué » et S « obtenir un 6 »

Comme $\mathbb{P}(()T) \in]0;1[$ et $\mathbb{P}(()S) \neq 0$, la formule de Bayes donne :

$$\mathbb{P}()_S(T) = \frac{\mathbb{P}(()T \cap S)}{\mathbb{P}(()S)} = \frac{\mathbb{P}(()T) \times \mathbb{P}()_T(S)}{\mathbb{P}(()T) \times \mathbb{P}()_T(S) + \mathbb{P}(()\overline{T})\mathbb{P}()_{\overline{T}}(S)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$$

$\boxed{\text{Il y a une probabilité } \frac{1}{2} \text{ que le dé soit truqué.}}$

exercice 11 Soit r, b, n des entiers non nuls. Une urne contient initialement r boules rouges et b boules blanches, on effectue n tirages comme suit : si la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne, si la boule tirée est rouge, elle est remplacée dans l'urne par une boule blanche prise dans une réserve annexe. Ainsi, l'urne contient toujours $r+b$ boules.

1. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage.
2. Sachant que l'on a obtenu une boule blanche au deuxième tirage, quelle est la probabilité qu'on ait obtenu une boule blanche au premier tirage ?
3. Calculer la probabilité d'avoir obtenu n boules blanches lors des n tirages.
4. On pose A : « on a obtenu exactement une boule rouge au cours des n tirages ».
   Montrer que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{r}{(r+b)^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} b^k(b+1)^{n-1-k}$ puis que $\mathbb{P}(A) = \dfrac{r}{(r+b)^n}\Big((b+1)^n - b^n\Big)$

<u>*Proposition de corrigé :*</u>

1. On pose les événements B_n :« on a tiré une boule blanche au n-ième tirage ». La formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\{B_1, \overline{B_1}\}$ donne :
   • Supposons B_1 réalisé. Alors l'urne contient toujours b blanches et r rouges et $P(B_2|B_1) = \frac{b}{b+r}$.
   • Supposons $\overline{B_1}$ réalisé. Alors l'urne contient toujours $b+1$ blanches et $r-1$ rouges et $P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b+1}{b+r}$.
   $$P(B_2) = P(B_1)P(B_2|B_1) + P(\overline{B_1})P(B_2|\overline{B_1}) = \frac{b}{r+b}\times\frac{b}{r+b} + \frac{r}{r+b}\times\frac{b+1}{r+b} = \frac{b^2+r(b+1)}{(r+b)^2}$$

2. On a $P(B_1)\neq 0$ et $P(B_2)\neq 0$ et la formule de Bayes donne :
   $$\begin{aligned} P(B_1|B_2) &= \frac{P(B_1\cap B_2)}{P(B_2)} \\ &= \frac{P(B_1).P(B_2|B_1)}{P(B_2)} \\ &= P(B_1)\times P(B_2|B_1)\times\frac{1}{P(B_2)} \\ &= \frac{b}{b+r}\times\frac{b}{b+r}\times\frac{(b+r)^2}{b^2+r(b+1)} \\ &= \frac{b^2}{b^2+r(b+1)} \end{aligned}$$

3. Comme la composition de l'urne reste inchangée si on tire une boule blanche, $P(B_1\cap\ldots\cap B_{n-1})\neq 0$.
   De plus, comme la composition de l'urne reste inchangée au fil des tirages de boules blanches,
   on a pour tout $k\in[\![2;n]\!]$, $P(B_k|B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}) = \frac{b}{b+r}$ et la formule des probabilités composées donne :
   $$P(B_1\cap\ldots\cap B_n) = P(B_1)\times P(B_2|B_1)\times P(B_3|B_1\cap B_2)\times\ldots\times P(B_n|B_1\cap\ldots\cap B_{n-1}) = \left(\frac{b}{b+r}\right)^n$$

4. A est réunion des événements incompatibles A_k ($k\in[\![1;k]\!]$) où A_k est l'événement :« L'unique boule rouge a été tirée au rang k (et les autres tirages étaient des boules blanches) ».
   Soit $k\in[\![1;n]\!]$, on a :
   $$A_k = B_1\cap\ldots\cap B_{k-1}\cap\overline{B_k}\cap B_{k+1}\cap\ldots\cap B_n$$
   Avec la formule des probabilités composées, on obtient :
   $$P(A_k) = P(B_1)P(B_2|B_1)\ldots P(B_{k-1}|B_1\cap\ldots\cap B_{k-2})P(\overline{B_k}|B_1\cap\ldots\cap B_{k-1})\ldots P(B_n|B_1\cap\ldots\cap B_{n-1})$$
   la composition des urnes est inchangée (b blanches et r rouges) jusqu'au tirage d'une rouge, puis est inchangée ($b+1$ blanches et $r-1$ rouges) après
   $$P(A_k) = \frac{b}{b+r}\times\ldots\times\frac{b}{b+r}\times\frac{r}{b+r}\times\frac{b+1}{b+r}\times\ldots\times\frac{b+1}{b+r}$$
   $$P(A_k) = \frac{r}{(b+r)^n}\times b^{k-1}\,(b+1)^{n-k}$$
   Ainsi,

$$P(A) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$$

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \text{ car les } A_k \text{ sont incompatibles deux à deux}$$

$$P(A) = \frac{r}{(b+r)^n} \sum_{k=1}^{n} b^{k-1}\,(b+1)^{n-k}$$

$$P(A) = \frac{r}{(b+r)^n} \sum_{j=0}^{n-1} b^{j}\,(b+1)^{n-1-j} \text{ avec le changement d'indices } j = k-1$$

$$P(A) = \frac{r}{(b+r)^n}\Big((b+1)^n - b^n\Big)$$

en utilisant la formule $(a-b)\sum_{k=1}^{n-1} a^{n-1-k}b^k = a^n - b^n$ avec $a = b+1$ et b (et donc $a - b = 1$!).

on aurait pu également se ramener à une somme géométrique classique.