Correction TD02 - Analyse -

Exercice 7 ✶✶✶ :

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

① *Calculons $f_n'(x)$ puis $f_n''(x)$:* On commence par noter que $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ car inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ **qui ne s'annule pas** sur $\mathbb{R}$.
Comme $x \longmapsto nx$ est une fonction polynôme (et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$), on peut assurer que :

$$\boxed{f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})}$$

Dès lors, pour tout x réel, on a :

$$f_n'(x) = \frac{-\,e^x}{(1+e^x)^2} + n \text{ et } f_n''(x) = \frac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}$$

Montrons que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$:

D'après ce qui précède $f_n''(x)$ est du signe de $e^x - 1$, à savoir **négatif** si $x < 0$ et **positif** si $x > 0$.
Donc f_n' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f_n'(0) = -\dfrac{1}{4} + n \geq 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	n	↘	$n-1/4$	↗	$+\infty$

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n'(x) \geq n - \frac{1}{4} > 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^*$$

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}}$.

② a) *Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$ et montrons que $-\dfrac{1}{n} < u_n < 0$:*
D'après ce qui précède, f_n est continue et strictement croissant sur $\mathbb{R}$.
Une étude rapide des limites prouve que sa limite en $-\infty$ vaut $-\infty$ et sa limite en $+\infty$ vaut $+\infty$.
On conclut que f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Dès lors, d'après le théorème de la bijection, $\exists! u_n \in \mathbb{R} / f(u_n) = 0$.

Il reste à montrer que $u_n \in \left[-\frac{1}{n}, 0\right]$. Or

$$f_n(-\tfrac{1}{n}) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 < 0 \text{ car } 1 + e^{-1/n} > 1 \text{ et } f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$$

Conclusion : $\boxed{f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } u_n \text{ sur } \left[-\tfrac{1}{n}, 0\right].}$

b) A l'aide de Geogebra on suit en fonction de n l'évolution des solutions de $f_n(x) = 0$. On conjecture alors que (u_n) est croissante et converge vers 0. Il semble aussi que nu_n tende en l'infini vers -0.5.

③ *Complétons le programme suivant pour trouver u_n avec une précision de $e > 0$:*

```
def dichotomie(n,e):
   a,b = -1/n,0
   while b-a >e :
      c = (a+b)/2
      if f(n,a)*f(n,c) <0 :
         b = c
      else:
         a = c
   return c
```

④ *Comparons $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$:* Plusieurs méthodes possibles :
— On peut noter que $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$ et donc : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ si $x < 0$.
— On peut écrire que si $x < 0$, alors $(n+1)x < nx$ et donc : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

✐ On ne retient que le cas $x < 0$ car on a vu en 2.a) que tous les termes u_n sont négatifs.
On peut dès lors poser $x = u_n$ et en déduire comme demandé que la suite (u_n) est croissante. En effet :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1}) \text{ donc } f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$$

Et puisque f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que $u_{n+1} > u_n$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est croissante.}}$

⑤ *Justifions que la suite (u_n) converge vers 0 et calculons la limite de nu_n :*
Comme la suite (u_n) est croissante et majorée par 0, elle converge vers un réel $l \leq 0$.
L'encadrement obtenu à la question 2.a) permet par ailleurs de conclure directement par passage à la limite que : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } 0}$.

Par ailleurs, $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow nu_n = -\dfrac{1}{1+e^{u_n}}$ avec $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (nu_n) \text{ converge vers } -\dfrac{1}{2}}$

⑥ *Montrons que $u_n + \dfrac{1}{2n} \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{8n^2}$:* Nous choisissons de montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} -8n^2 \cdot \left(u_n + \dfrac{1}{2n}\right) = 1$.
Puisque $f_n(u_n) = 0$, on a :

$$\begin{aligned} u_n + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n}\frac{1}{1+e^{u_n}} \\ &= \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{u_n}}\right) = \frac{1}{n}\frac{e^{u_n}-1}{2(1+e^{u_n})} \end{aligned}$$

Donc :

$$-8n^2\left(u_n + \frac{1}{2n}\right) = -4n\frac{e^{u_n}-1}{1+e^{u_n}} \underset{n\to\infty}{\sim} -4n\frac{u_n}{2}$$

puisque u_n est proche de 0 pour de grandes valeurs de n et donc $e^{u_n} - 1 \underset{n\to\infty}{\sim} u_n$

Il suffit de rappeler que $nu_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{-8n^2\left(u_n + \dfrac{1}{2n}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} 1 \text{ - Ce qu'il fallait démontrer}}$

On va contrôler ce résultat à l'aide de la fonction `dichotomie` en évaluant pour de grandes valeurs de n la limite de la suite :

$$v_n = \left(u_n + \frac{1}{2n}\right) \cdot 8n^2$$

Voici le script Python utilisé qui commence par retourner, grâce à la fonction `suiteXn()` une liste `LX` contenant l'ensemble des termes de la suites (u_n) pour n allant de 1 à N.
La fonction graphe permet de représenter les termes de la suite (v_n) pour n allant de 1 à N.
✐ On prendra garde que la liste `LX` est de longueur N avec `LX[0] =` u_1 et `LX[N] =` u_{N-1}.

```
def suiteXn(N):
    LX = []
    for n in range(1,N+1): # termes de X1 à XN
       va = dichotomie(n,eps)
       LX.append(va)
    return LX
def graphe(N):
    abs = np.arange(1,N+1)
    LX = suiteXn(N)
    plt.figure("suite u")
    plt.plot(abs,LX,'ro-')
    Lv = [(LX[k]+1/(2*(k+1)))*(k+1)**2*8 for k in range(N)] # Calcul de v1  à  vN-1
    plt.figure('suite (u_n+1/(2n))*n*n*8')
    plt.plot(abs,Lv,'bo-')
    plt.show()
```