2 Fonctions d'une variable réelle

Les objectifs : Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien (ln), fonctions exponentielle $x \longmapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, fonction logarithme décimal (log), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor \cdot \rfloor$) et valeur absolue ($|\cdot|$).
Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{\ }$ et arctan). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.
Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.
Développements limités (développements usuels : *exp*, *cos*, *sin*, $x \longmapsto 1/(1+x)$, $x \longmapsto ln(1+x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$). Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Calculs de limites, utilisation des équivalents usuels

*Reprendre dans les cours de BCPST1 l'**exercice 1 du chapitre** 17, les exercices **1, 3, 4, 5, 6, 12, 13 et 14** du chapitre 23*

Exercice 1 ✶ : Continuité

Soit f une application continue sur $I = [0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.
Pour tout n entier naturel non nul, on souhaite montrer que l'équation $f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) = f(x)$ admet au moins une solution sur I.
Soit g définie sur I par $g(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - f(x)$.
Montrer que le calcul de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right)$ permet de conclure.

En complément : *Reprendre dans le chapitre 17, les exercices 15 et 17*

Exercice 2 ✶✶✶ : Continuité

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n(x) = ne^{-x} - x$$

① Montrer que f_n s'annule en un unique point x_n et que $x_n > 0$.

② Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

③ Montrer que : $\underset{n\to\infty}{lim}\, x_n = +\infty$ et $\underset{n\to\infty}{lim} \dfrac{x_n}{\ln n} = 1$

...D'après Agro-véto 2003

Exercice 3 ❤ : Continuité et dérivabilité

Étudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes :

① $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

② $g(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{2}{\ln x}\right)$

En complément : *Reprendre dans le chapitre* 19*, les exercices 2 et 8*
Pour le ***Théorème des valeurs intermédiaires*** *et le* ***théorème de la bijection****, reprendre dans le chapitre* 17 *les exercices 10, 12, 13 et 14.*

Exercice 4 ✶ : Dérivabilité

① **a.** Montrer que : $\forall x \in]0,1[,\ 1 + x \leq e^x \leq \dfrac{1}{1-x}$

b. En déduire la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{kn} \frac{1}{p}$ où k est un entier naturel non nul fixé.

② Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]a,b[$. Montrer que, s'il existe trois points de la courbe de f qui sont alignés, alors f'' s'annule au moins une fois sur $]a,b[$.

Pour le ***Théorème des accroissements finis****, reprendre dans les cours de BCPST1 le chapitre* 19*, exercices 5, 6, 7, 10, 12, 13 et 14 ainsi que l'exercice* ***7*** *du chapitre* 23.

Exercice 5 ✶✶ : Dérivées de fonctions réciproques

① Montrer que la fonction cosinus réalise une bijection de $I = [0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.
On note A la réciproque de la fonction cosinus restreinte à l'intervalle I.

② Déterminer $A(0)$, $A(-1/2)$ et $A(\sqrt{3}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\sin(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

⑥ **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

b. En déduire le développement limité à l'ordre 3 en 0 de A.

...D'après Agro-véto 2015

⚠ *Pour la* ***bijectivité*** *et l'expression des* ***fonctions réciproques****, reprendre dans les cours de BCPST1 le chapitre* 17*, exercices 11, 12, 16 et 17*

Développements limités

⚠ *Reprendre dans les cours de BCPST1 les exemples page* 9 *et* 10 *du chapitre* 23*bis ainsi que les exercices* ***1, 4, 5, 6, 7, 9, 10 et 13*** *de ce même chapitre*

Exercice 6 ❤ : Développements limités et branches infinies

Déterminer le comportement asymptotique des deux fonctions ci-dessous :

$$f : x \longmapsto (x-2)e^{1/x} \text{ et } g : x \longmapsto x \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

Ils sont tombés à l'oral de l'agro...

Exercice 7 :

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

① Calculer $f_n'(x)$ puis $f_n''(x)$. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

② **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$ et montrer que

$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$

b. A l'aide de l'outil informatique de votre choix, conjecturer le comportement de (u_n) et conjecturer la limite de nu_n.

③ Compléter le programme suivant pour trouver u_n avec une précision de e, valeur réelle strictement positive.

```
def f(n,x):
   f=1/(1+exp(x))+n*x
   return f

def dichotomie(n,e):
   a,b = ...
   while b-a ... :
      c = (a+b)/2
      if f(n,a)*f(n,c) ... :
         ...
      else:
         ...
   return ...
```

④ Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

⑤ Justifier que la suite (u_n) converge vers 0 et calculer la limite de nu_n.

⑥ Montrer que $u_n + \dfrac{1}{2n} \equiv -\dfrac{1}{8n^2}$. Le contrôler à l'aide de la fonction `dichotomie`.

...D'après Agro-véto 2015

Exercice 8 :

Soit x un réel de l'intervalle $[0;1[$ fixé. On définit les suites $(f_n(x))_{n\geq 1}$, $(g_n(x))_{n\geq 1}$ et $(h_n(x))_{n\geq 1}$ par :

$$f_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+x^k),\ \ g_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1-x^{2k-1}) \text{ et } h_n(x) = f_n(x)g_n(x).$$

On pose, sous réserve d'existence, $f(x) = \underset{n\to\infty}{lim} f_n(x)$, $g(x) = \underset{n\to\infty}{lim} g_n(x)$ et $h(x) = f(x)g(x)$.

① Écrire un script Python qui affiche dans un repère les points de coordonnées $(f_n(x); g_n(x))$ lorsque x prend les valeurs $\frac{k}{100}$ avec $k \in \{0;\cdots;80\}$ et $n = 100$. Faire une conjecture d'une relation simple entre $f(x)$ et $g(x)$ en admettant leurs existences.

② Montrer que pour tout $x \in [0;1[$, la suite $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante et que la suite $(g_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante.

③ **a.** Établir que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ 1+t \leq e^t.$$

En déduire que, pour tout $x \in [0;1[$, $f(x)$ existe et vérifie :

$$1 \leq f(x) \leq \exp\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

b. Montrer que f est continue en 0.

④ **a.** Justifier l'existence de $g(x)$ pour tout $x \in [0;1[$.

b. Montrer que pour tout $t \in [0;1[$ et $x \in [0;1[$, $1-(1-x)^t \geq xt$.
(on pourra étudier une fonction de x ou utiliser la formule des accroissements finis.)

c. En déduire l'encadrement suivant, pour tout $x \in [0;1[$:

$$\exp\left(\frac{\ln(1-x)}{1-x^2}\right) \leq g(x) \leq \exp\left(-\frac{x}{1-x^2}\right).$$

puis la continuité de g en 0.

⑤ **a.** Montrer que, pour tout $x \in [0;1[$: $f_n(x^2)g_n(x^2) = f_{2n}(x)g_n(x)$.
En déduire que $h(x^2) = h(x)$.

b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $h(x^{2^n}) = h(x)$.
Conclure alors que pour tout $x \in [0;1[$, $h(x) = 1$.

c. Ce dernier résultat confirme-t-il votre conjecture ?

...D'après Agro-véto 2018