1

T.D.1 Suites numériques

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont il faut connaître les techniques ;
Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou de l'agro.

Les objectifs : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme.
Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.
Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Croissances comparées : $a^n = \circ(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = \circ(a^n)$ (avec $\alpha > 0$)
Suites équivalentes.

Exercice 1 ✶ : Premiers termes et convergence

Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les dix premiers termes et en fournir une représentation graphique en utilisant Python.
Conjecturer informatiquement leur nature (convergente ou divergente) qu'on justifiera dans un second temps en utilisant le vocabulaire adapté (*monotone*, *minorée*, *majorée*, *bornée*, *convergente* etc.).

① Suites données sous formes explicites :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \dfrac{n}{2} - 2$; $v_n = \dfrac{1}{n}$; $w_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$; $x_n = \dfrac{2^n}{n^{10}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}}$; $b_n = sin\left(\dfrac{\pi n}{2}\right)$;

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $c_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^2$; $d_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n$; $e_n = cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$

② Comme précédemment, tracer et conjecturer à l'aide de Python la nature des suites ci-dessous, données sous forme récurrente. ✐ *N.B. :* La justification mathématique de ces conjectures sera abordée dans l'exercice 4 :

$u_0 = 2,\ u_{n+1} = 2u_n - 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$v_0 = 0,\ v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n + 2},\ \forall n \in \mathbb{N}$

$w_0 = 2\ , w_{n+1} = \sqrt{3w_n + 2},\ \forall n \in \mathbb{N}$

Exercice 2 ✶ : Les suites usuelles

Dans le même esprit on reprendra les exercices 3, 4, 5 et 6 du chapitre 6 « Suites usuelles », l'exercice 8 du chapitre 10 « Convergence de suites »

① Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par leur premier terme et une relation de récurrence. On indiquera leur nature :
$\forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+1} = 3u_n - 1,\, u_0 = -10$
$\forall n \in \mathbb{N},\, v_{n+1} = 3v_n^2$ et $v_0 = 1$ (✐ Un opération préalable est nécessaire...)

② Même questions pour la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une récurrence sur deux rangs par :

a. $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$ et $u_0 = -1,\, u_1 = 3$.

b. $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$ et $u_0 = 1,\, u_1 = \sqrt{3} - \dfrac{1}{2}$

Exercice 3 ✶✶ : Suites et sommes

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

① Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).

② Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, \dfrac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ et en déduire la convergence de (u_n).

③ Déterminons $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n$:

a. Montrer par application du théorème des accroissements finis que :

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) < \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

✐ *Indication :* On pourra appliquer ce théorème à $u \longmapsto \ln(1+u)$ où $u \in \mathbb{R}_+^*$.

b. En déduire que $u_n < \ln(2) < u_n + \dfrac{1}{2n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

✐ *Indication* On pourra penser à mettre en place des télescopages.

c. Conclure sur une fonction Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$.

④ On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n+k}\sqrt{n+k-1}}$$

a. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\, u_n \leq v_n \leq u_{n-1} + \dfrac{1}{2n-1}$

b. En déduire la convergence de la suite (v_n) et sa limite.

Exercice 4 ✶ : Suites définies par une fonction

Nous étudions les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Quelques rappels utiles :

Ce théorème est surtout utilisé pour démontrer l'**existence** d'une limite finie.
Il **ne donne pas la limite**.

Attention, connaître un majorant ne signifie pas qu'il s'agit de la limite de la suite. En effet, si 2 est majorant, alors 3 aussi, 7 aussi...

Par contre, si, (u_n) est croissante et majorée par 2, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \leqslant 2$. Le majorant majore la limite et ceci peut être très utile pour démartager deux candidats limite.

Propriété 6 *(Théorème de la limite monotone)*

- Toute suite croissante et majorée converge vers un réel ℓ.
- Toute suite décroissante et minorée converge vers un réel ℓ.

Propriété 11 *(Petit théorème du point fixe)*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et continue en $\ell \in I$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
telle que u converge vers ℓ

alors $\ell = f(\ell)$ (on dit alors que ℓ est un point fixe de f).

Propriété 14 *(Théorème des Accroissements Finis)* — Accroissements finis

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

Propriété 15 *(Inégalité des Accroissements Finis)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
f une fonction dérivable sur I telle qu'il existe deux réels m et M qui vérifient :
$\forall x \in I, m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors $\forall (a, b) \in I^2$ tels que $a \leqslant b$,

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Propriété 16 *(Inégalité des Accroissements Finis, deuxième version)*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
f une fonction dérivable sur I telle qu'il existe un réel K qui vérifie :
$\forall x \in I, |f'(x)| \leqslant K$.

Alors $\forall (a, b) \in I^2$,

$$|f(b) - f(a)| \leqslant K|b - a|.$$

Dans le même esprit on reprendra les exercices 5 et 10 du chapitre 10 « Convergence de suites », les exercices 7, 8, 20 et 24 du chapitre 17 « limites et continuité » et les exercices 9, 14, 15 et 16 du chapitre 19 « Dérivation »

① Sans recours aux résultats connus sur les suites arithmético-géométriques, justifier **graphiquement**, selon la valeur de u_0, la nature de la suite (u_n) définie par : $u_{n+1} = 2u_n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

② Prouver la conjecture faite dans l'exercice 1, 2) pour la suite (v_n) définie par : $v_0 = 0$, $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{v_n + 2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

③ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 \in [-2, +\infty[$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$

a. Soit f définie par $f(x) = \sqrt{x + 2}$. Étudier cette fonction et tracer son graphe.
b. Montrer que l'intervalle $I = \mathbb{R}_+$ est stable par f. En déduire que la suite (u_n) est monotone et l'existence de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$ (✐ On ne cherchera pas à le déterminer)
c. Appliquer le théorème des accroissement finis pour montrer l'existence de $k \in]0, 1[$ tel que : $|u_{n+1} - \alpha| \leq k|u_n - \alpha|$. Conclure sur la convergence de $(u_n)_{n\geq 0}$.

④ On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2+u_n}{u_n}$

a. Faire l'étude de $f : x \longmapsto \dfrac{2+x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. Montrer que l'intervalle $I = [3/2; 3]$ est stable par f et en déduire l'existence de $\alpha \in I$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

c. La suite (u_n) est-elle monotone ? Préciser son comportement.

d. Montrer que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \dfrac{8}{9}$ et conclure que (u_n) converge vers α.

e. Majoration de l'erreur : Déterminer un rang n_0 à partir duquel $|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 6 ✶✶✶ (oral Agro-Véto 2015) : Suite de racines

Quelques rappels utiles :

Propriété 16 *(Théorème des valeurs intermédiaires)*

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Définition 3 *(Suites adjacentes)*

Soient u et v deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque
- u est croissante,
- v est décroissante,
- $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété 8 *(Convergence des suites adjacentes)*

Soit u et v deux suites adjacentes telles que u est croissante et v est décroissante. Alors u et v convergent vers une même limite réelle ℓ.

Propriété 18 *(Théorème de la bijection)* Théorème de la bijection

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$.
Sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

suites définies implicitement
Dans certains exercices, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n comme étant l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$. Très souvent, f est strictement monotone (et continue) sur un intervalle.
Pour étudier la monotonie de $(u_n)_n$, on est amené par exemple à étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$ (ou de $f_n(u_{n+1})$).

Si par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante et qu'on trouve par exemple $f_{n+1}(u_n) < 0$, en se souvenant que $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, il vient $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc, par stricte décroissance de f_{n+1}, $u_n > u_{n+1}$. Dans ce cas la suite (u_n) serait décroissante.
ces idées générales sont à adapter à chaque exercice
Se souvenir qu'on joue souvent à la fois sur les monotonies de :
- $n \mapsto f_n(x)$ (x fixé)
- $x \mapsto f_n(x)$ (n fixé)

Dans le même esprit on reprendra les exercices 21, 22, 23 et 25 du chapitre 17 « Continuité, limite de fonctions »

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

② **Modélisation :** A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.
Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

③ **Étude mathématique :**

a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
En déduire la monotonie de la suite (α_n).

b. Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l.
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n).

Exercice 7 ⋆⋆⋆ (oral Agro-Véto 2017) : suites équivalentes

Quelques rappels utiles :

Définition 1 ***(Suites équivalentes)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que u et v sont <u>équivalentes</u>

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou encore $u_n \sim v_n$ s'il n'y a pas ambiguïté.

Propriété 4 ***(Équivalents usuels)***

Soit u une suite convergeant vers 0 et α un réel non nul fixé. Alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$$

$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$$

Définition 3 ***(Sommes de Riemann)***

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On définit les deux suites $(S_n)_{n\geqslant 1}$ et $(T_n)_{n\geqslant 1}$ comme suit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a_k),$$

où $a_0 = a$, $a_n = b$ et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.
Les suites S_n et T_n sont appelées les <u>sommes de Riemann</u> associées à la fonction f.

Propriété 18 ***(Convergence des sommes de Riemann)***

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$.

Les sommes de Riemann S_n et T_n convergent vers $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si de plus f est de classe $\mathcal{C}^1$, l'erreur commise en approchant I par S_n ou T_n est inférieure ou égale à

$$\frac{(b-a)^2}{2n} \sup_{t\in[a,b]} |\,f'(t)\,|\,.$$

Développement limité des fonctions trigonométriques

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \qquad \text{(ordre } 2n+1\text{)}$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \qquad \text{(ordre } 2n\text{)}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ telle que $u_1 \in]0;\pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a : $u_{n+1} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\sin(u_n)$.

① Montrer que pour tout $n \geq 3$: $0 < u_n < \dfrac{\pi}{2}$

② Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.

③ Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1, puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n).

④ Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît strictemet à partir du rang n_0. (On utilisera une expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1}).

⑤ Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$ Conclure sur la convergence de (u_n).

⑥ Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$.

⑦ En posant pour $n \geq 1$, $x_n = \dfrac{u_n}{n}$, montrer que :

$$(x_{n+1} - x_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{-n^2}{6} x_n^3, \text{ puis que } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

⑧ En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\dfrac{1}{x_n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3}$, vérifier la conjecture faite à la question 7.