- Programme de colle quinzaine 1... -

Exercices **Révisions « Suites numériques »(BCPST1)**

✐ Pas de question de cours cette quinzaine mais un exercice traité en BCPST1, pris dans la liste ci-dessous, à savoir rédiger.

- **Chapitre 10 :** Exercice 10
- **Chapitre 17 :** Exercices 21, 22 et 24
- **Chapitre 19 :** Exercices 7 et 13

Révisions 1 - Suites numériques :

Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme.
Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.
Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Croissances comparées : $a^n = \circ(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = \circ(a^n)$ (avec $\alpha > 0$)
Suites équivalentes.

Révision 2 - Fonctions :

Tout résultat utile pour traiter les exercices classiques sur les suites numériques (suites récurrentes définies par une fonction, suites implicites, par exemple...)

Conformément au programme, on demande de reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien (ln), fonctions exponentielle $x \longmapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, fonction logarithme décimal (log), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor\cdot\rfloor$) et valeur absolue ($|\cdot|$).
Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{\ }$ et arctan). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$ (le principe de l'algorithme de dichotomie sera rappelé).
Dérivation : formule des accroissements finis.

Bonnes colles !

Exercice 10 - chapitre 10

On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = 10 \\ u_{n+1} & = \dfrac{3u_n}{u_n+1} \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

① Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

② a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{u_n-2}{3}$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{8}{3^n}$

c) Soit $\varepsilon > 0$. On note ℓ la limite de la suite (u_n). À partir de quel rang n_0 peut-on affirmer que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \ ?$$

Exercice 21 - chapitre 17

Soit f définie sur $]1; +\infty[$ définie par $f : x \longrightarrow \dfrac{x}{\ln(x)}$

① a) Étudier les variations de f.

b) Établir que la restriction $\tilde{f}$ de f à $]1, e[$ réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Tracer dans un même repère l'allure des graphes de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$.

② Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x = n\ln(x)$ admet une unique solution x_n dans $]1, e[$

③ Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.

④ En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 22 - chapitre 17

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

① Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n

② Calculer u_1 et u_2.

③ Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$

④ a) Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.

b) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 24 - chapitre 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f(x) = \frac{e^{-x}}{x}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

① Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.

② Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

③ a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = e^{-x} - x^2$$

b) En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

④ a) Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.

b) En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

⑤ On pose : $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si x>0} \\ 0 & \text{si x=0} \end{cases}$

a) Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.

b) Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.

c) En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Exercice 7 - chapitre 19

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 & \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} & = 2 + \dfrac{1}{u_n^2} \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

① Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 2$

② Soit f la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x^2}$.
Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution l dans I.

③ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - l| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - l|$

④ Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - l| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - l|$

⑤ Conclure sur la convergence de (u_n)

Exercice 13 - chapitre 19

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = \sqrt{u_n + 1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

On pose, pour tout réel $x \geqslant -1$, $f(x) = \sqrt{x+1}$

① Montrer que $f([0;2]) \subset [0;2]$ et que : $\forall x \in [0;2], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

② Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe de f dans $[0;2]$

③ Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

④ Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

⑤ Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

⑥ Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$

⑦ Écrire un programme `Python` donnant le plus petit entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$.

⑧ Écrire un programme `Python` donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.