1 SERIES NUMERIQUES

Les objectifs : Les séries sont introduites ici comme un outil pour donner tout leur sens aux probabilités et variables aléatoires discrètes. En dehors de questions probabilistes, les séries ne doivent être utilisées que de manière exceptionnelle et en lien avec des démarches de modélisation.

1 Généralités

1.1 Introduction

A titre d'exemple introductif pour appréhender la notion de série numérique, nous allons considérer l'exemple simple des séries géométriques. Vous devez vous rappeler que les suites géométriques sont définies par la donnée d'un premier terme u_0 et d'une raison réelle q telle que $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par exemple

$$2{,}4, 8, 16, 32, \cdots \tag{1}$$
$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{8}{27}, \frac{16}{81}, \cdots \tag{2}$$
$$a{,}ar, ar^2, ar^3, \cdots \tag{3}$$

sont les premiers termes de suites géométriques. Des exemples concrets de telles suites sont faciles à envisager.

Supposons que le nombre de bactéries double toutes les 20 minutes. Alors les termes de la suite (1) représentent les nombres par lesquels la population de bactérie a été multipliée après 20 minutes, 40 minutes, 1 heure, etc.
Maintenant supposons qu'une balle lâchée sans vitesse initiale rebondisse de telle manière qu'elle atteigne à chaque rebond $2/3$ de sa hauteur précédente. Dans ces conditions, les termes de la suite (2) représentent les hauteurs successives en mètres des bonds effectués par la balle si elle est lâchée d'une hauteur initiale de 1 mètre...
Dans le premier exemple, il est assez clair que la population va croître indéfiniment selon un modèle malthusien (au diable les considérations de ressource !). Quant au second exemple, la hauteur atteinte par la balle diminue à chaque rebond et on peut se poser la question de la hauteur totale parcourue par la balle. Elle est tombée d'une hauteur d'un mètre puis remontée d'une hauteur de $2/3$ mètres, retombée de cette même hauteur avant de remonter d'une hauteur égale à $4/9$ mètre, etc. Dès lors, il semble raisonnable d'écrire que la distance totale parcourue vaut :

$$1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 2 \cdot \frac{8}{27} + \cdots = 1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots \right) \tag{4}$$

Les points de suspension indiquent que la somme se poursuit sur le même principe jusqu'à l'infini et qu'il n'y a donc pas de dernier terme ! En premier lieu, comme dans le cas de la série (1), rien n'assure que cette somme existe. Par ailleurs, y-compris lorsqu'elle existe (notons la S) remarquons qu'additionner les n premiers termes (même n très grand) ne permet pas de conclure puisqu'il reste une infinité de termes à lui ajouter pour atteindre S...
Une idée possible consiste pourtant à calculer la distance parcourue lors de premiers rebonds et à utiliser notre cours de maths de première année... Posons :

$$S_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 2\left(1 - (\frac{2}{3})^n\right)$$

Comme $0 < \dfrac{2}{3} < 1$, on a : $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ et donc $\displaystyle \lim_{n\to\infty} S_n = 2$.

On considérera alors que la distance totale parcourue est finie et vaut $\boxed{\displaystyle \lim_{n\to\infty} (1 + 2 \cdot S_n) = 5}$.

C'est une réponse de mathématicien à un problème mathématique car tout physicien vous assurera que l'énergie dissipée par la balle à chaque rebond l'empêchera de poursuivre indéfiniment ses aller-retours, que par conséquent ça n'a pas de sens d'imaginer qu'elle puisse poursuivre jusqu'à des rebonds d'une hauteur inférieure au micron...

Cela étant, on lui rétorquera qu'au bout de quelques rebonds, la différence est négligeable entre la distance partielle $D_n = 1 + 2 \cdot S_n$ et la distance totale $D = 5m$ et qu'en conséquence, il est plus simple de prendre 5 pour distance totale que de calculer la somme des 25 premiers termes...
Argumentons davantage et posons nous la question de savoir pour quelle valeur de n la distance partielle D_n approche D à 10^{-3} près. Posons $R_n = D - D_n = 5 - (1 + 2S_n) = 4 - 2S_n$. Alors

$$R_n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow 4 - 4\left(1 - (\tfrac{2}{3})^n\right) \leqslant 4\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(10^{-3}/4)}{\ln(2/3)} \approx 20.45$$

Autrement dit, pour $n = 21$, le calcul de $D_n = 1 - 2 \cdot S_n$ est une valeur approchée de 5 au millimètre près !

Les séries construites par sommation des termes d'une suite géométrique (comme dans (3)) sont dites des « séries géométriques ». Certaines pourront être sommées à l'infini, d'autres pas. Nous les étudierons en détail.
Pourtant l'enjeu de ce cours dépasse largement ces seules séries, et l'alibi sera essentiellement probabiliste.

✐ Avant de vous plonger dans la théorie, je vous suggère une introduction accessible et savante de la notion de séries. Utilisez le qrcode suivant qui vous mènera sur le remarquable site « images des maths »

1.2 Définitions.

Définition *séries numériques*

Soit (u_n) une suite numérique de nombres réels ou complexes, de premier terme u_0.
On appelle `série numérique` *de terme général u_n et de premier terme u_0 la suite (S_n) définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Pour tout entier naturel n, S_n est dit la $n$ième `somme partielle` *(ou somme partielle d'ordre n) de la série $\sum u_n$.*

Notation : La série est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$ ou plus succinctement $\sum u_n$ si on ne s'intéresse qu'à sa nature.

Définition *somme d'une série convergente*

La série de terme général u_n converge si la suite (S_n) converge. Dans ce cas, la limite de la suite (S_n) des sommes partielles est appelée la `somme de la série` *et on note :*

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} u_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Si la suite (S_n) diverge, on dira que la série est `divergente` *(ou qu'elle diverge).*

Remarque 1 : Comme pour l'étude des suites, on distinguera deux sous-problèmes : celui de la convergence et, une fois celle-ci acquise, celui de la valeur de la somme de la série.

✐ D'après Niels Abel, en 1828 : « Divergent series are the invention of the devil and it is shameful to base on them any demonstration whatsoever. By using them, one may draw any conclusion he pleases and that is why these series have produced so many fallacies and so many paradoxes... »

Remarque 2 : Si jamais le terme générale u_n d'une série numérique n'est défini qu'à partir d'un rang $n_0 > 0$, on se ramènera aux deux précédentes définitions en posant : $u_0 = 0 = \cdots = u_{n_0-1}$
On retiendra que la nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes, ou encore :
Si $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ alors $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature (d'où la notation $\sum u_n$)

Remarque 3 : Toute suite peut être vue comme une série. En effet, soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$$

Dès lors :

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \text{ avec } \begin{cases} u_0 & = a_0 \\ u_k & = a_k - a_{k-1}\ ,\ \forall k \geq 1 \end{cases},$$

Exemple

La divergence de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout n entier naturel par $a_n = \ln(n+1)$ permet d'obtenir la divergence de la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$.

1.3 Propriétés.

Théorèmes

condition nécessaire de convergence

Soit (u_n) une suite numérique. Si la série $\sum u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

La réciproque est fausse !

Théorèmes

Combinaison linéaire de séries convergentes

Si deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors pour tous réels λ et μ, la série $\sum (\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et on a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{\infty} v_n$$

- Si $\sum u_n$ **converge** et $\sum v_n$ **diverge**, alors $\sum (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum u_n$ **diverge** et $\sum v_n$ **diverge**, alors on ne peut rien dire de $\sum (u_n + v_n)$

Définition

Reste d'une série convergente

En cas de convergence de la série $\sum u_n$, *on appelle reste de la série la suite* $(R_n)_{n\geq 0}$ *telle que :*

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Le reste n'est défini que si la série est convergente.

Théorèmes

Pour toute série $\sum u_n$ *convergente, on a* $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$

1.4 Les séries à termes positifs.

On considère dans ce paragraphe les séries de terme général u_n, positif à partir d'un certain rang noté par la suite n_0 (la nature d'une série étant indépendante de ses premiers termes, on supposera sans risque que $n_0 = 0$).
Par ailleurs, en passant à l'opposé, les résultats qui vont suivre s'étendent par linéarité à toute série de terme général u_n négatif à partir d'un certain rang.

Théorèmes

Soit (u_n) *une suite réelle positive à partir d'un certain rang.*

- $\sum u_n$ *converge si et seulement si la suite* $(S_n) = \left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$ *est majorée.*
- $\sum u_n$ *diverge si et seulement si* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$.

Théorèmes

Théorème de comparaison

Soient deux séries à termes positifs u_n *et* v_n *telles que* $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang. Alors :*

$$\begin{cases} \sum v_n \text{ converge} & \Rightarrow \sum u_n \text{ converge} \\ \sum u_n \text{ diverge} & \Rightarrow \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$$

Propriété

Soit (u_n) une suite positive.

- *Si la série* $\sum u_n$ *est convergente, alors :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k \geq 0$.
- *Si de plus la suite* (u_k) *n'est pas identiquement nulle, alors :* $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} u_k > 0$.

2 Les exemples de référence

2.1 Séries géométriques

Définition — *Séries géométriques*

Une `série géométrique` *est une série* $\sum u_n$ *où* (u_n) *est une suite géométrique.*

Théorèmes — *Convergence des séries géométriques*

Soit q un nombre réel. La série $\sum q^n$ *converge si et seulement si* $|q| < 1$. *On a alors :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

Exemple

Voici un exemple d'utilisation :

$0.333333... = 3 \cdot \dfrac{1}{10} + 3 \cdot \dfrac{1}{100} + 3 \cdot \dfrac{1}{1000} + ... = 3 \cdot \dfrac{1}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{1}{3}$

Ainsi

$$0.785714285714... = 0.5 + 0.285714285714... = \frac{1}{2} + \frac{0.285714}{1-10^{-6}} = \frac{1}{2} + \frac{285714}{999999} = \frac{1}{2} + \frac{2}{7} = \frac{11}{14}$$

Sauriez-vous dans ce cas donner une expression rationnelle de $0.818181...$ *?*

Théorèmes — *Séries géométriques dérivées*

Soit q un nombre réel.
Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nq^{n-1}$ *et* $\displaystyle\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ *convergent si et seulement si* $|q| < 1$. *On a alors :*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{1}{(1-q)^2} \text{ et } \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)q^{n-2} = \frac{2}{(1-q)^3}$$

Remarque : On en déduit que les séries $\sum nq^n$ et $\sum n^2q^n$ convergent si et seulement si $|q| < 1$. On a alors :

$$\sum_{n=0}^{\infty} nq^n = ... \qquad ; \sum_{n=0}^{\infty} n^2q^n = ...$$

2.2 Séries exponentielle

Théorèmes — *Série exponentielle*

Pour tout x réel, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

Remarque : On déduit de ce résultat que, pour $x \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ ou encore $x^n = \circ(n!)$

On retiendra le cas particulier $x = 1$, à savoir : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$

2.3 Séries télescopiques

Définition — *Séries télescopiques*

Une `série télescopique` *est une série de la forme $\sum(u_{n+1} - u_n)$ où (u_n) est une suite réelle.*

Théorèmes — *Convergence des séries télescopiques*

Soit (u_n) une suite réelle.
La série télescopique $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) est convergente

.

La convergence de la série $\sum \frac{1}{n^2}$ se démontre par théorème de convergence par comparaison avec la série télescopique $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)$

3 Convergence absolue

Définition — *Séries absolument convergentes*

Soit (u_n) une suite réelle. La série $\sum u_n$ est `absolument convergente` *si, et seulement si la série $\sum |u_n|$ est convergente*

Théorèmes — *Condition suffisante de convergence d'une série*

Toute série absolument convergente est convergente

La réciproque est fausse ! On pensera par exemple à la série $\sum u_n = \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ dont le T.D. permettra de montrer qu'elle converge, de somme égale à $\ln(2)$ alors que $\sum |u_n|$ est la série harmonique qui diverge.

On admet que la valeur de la somme d'une série absolument convergente ne dépend pas de l'ordre d'énumération de ses termes.