Devoir surveillé 1 : Suites numériques et fonctions

Le sujet se compose d'un exercice et d'un problème. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice n'est pas autorisé au cours de l'épreuve.

Exercice :

1. Manipulations élémentaires avec Python :

① On considère la liste `L1 = [1,3,'cinq',7,'neuf',11]`.
Comment, avec une commande Python et le seul recours à `L1`, pouvez-vous :

a) Obtenir le nombre d'éléments dans `L1` :

b) afficher l'entier `7` :

c) afficher le `f` de `'neuf'`

d) savoir si l'entier `9` est dans `L1` :

e) compléter la liste pour qu'elle devienne : `[1,3,'cinq',7,'neuf',11,13]` (on donnera si possible deux méthodes possibles).

f) Compter le nombre de `7` dans la liste :

② Créer la liste `L2 = [1,4,9,16,25, ...,100]`

③ On suppose avoir importé la bibliothèque `numpy` grâce à la commande `import numpy as np`.
Que retourne :

a) `np.arange(10)` ?

b) `np.arange(1,10)` ?

c) `np.arange(1,10,2)` ?

d) `np.linspace(1,10,10)` ?

2. Premiers termes d'une suite numérique :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0, u_1 \in \mathbb{R}, a \in]0,1[\\ u_{n+2} = au_{n+1} + (1-a)\min(1, u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On souhaite pouvoir estimer son éventuelle convergence. Écrire une fonction Python `suiteMin(n,a)` qui retourne sous forme de liste l'ensemble des termes u_0 à u_n. Les premiers termes u_0 et u_1 seront demandés à l'utilisateur dans le corps de la fonction.
Remarque : Préciser si nécessaire la ou les bibliothèques utilisées et on s'interdira l'emploi de la fonction `min()` de Python.
N. B. : Aucune étude de la suite (u_n) n'est demandée.

Problème :

Soit t un réel strictement positif.
On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la donnée de $x_0 = t$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = \sqrt{x_n}$$

1. a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g : x \longmapsto \sqrt{x} - x$. Étudier le signe de g.
   b) Montrer que si $t \geq 1$, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq x_{n+1} \leq x_n$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
   c) Etudier $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $t < 1$.

   On considère également les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies respectivement par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(x_n - 1) \text{ et } v_n = 2^n\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) = \frac{u_n}{x_n}$$

2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ en fonction de x_{n+1}. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Déterminer de même le sens de variation de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n \geq 0$.

5. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.

6. Déduire alors de la question 1. que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite qu'on notera L.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, donner un encadrement de L à l'aide de u_n et v_n. En déduire que pour tout réel t strictement positif, on a :

$$1 - \frac{1}{t} \leq L \leq t - 1$$

   L est un nombre réel dépendant de la donnée de x_0, c'est-à-dire de t.
   Nous pouvons alors considérer la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(t) = L$.

8. Écrire une fonction Python `estimef(t)` qui retourne une valeur approchée à 10^{-3} près de L pour tout valeur de $t \in \mathbb{R}_+^*$.
   Indiquer comment tracer le graphe de cette fonction sur l'intervalle $[0.1, 5]$ grâce à Python.

   Pour tout $t > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, nous poserons : $x_n(t) = x_n$; $u_n(t) = u_n$; $v_n(t) = v_n$ pour indiquer que ces réels dépendent aussi de t.

9. Déterminer $f(1)$.

10. Déterminer par encadrement :

$$\lim_{t\to 1} \frac{f(t)}{t-1}$$

   En déduire que f est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

11. a) Montrer que :

$$\forall t_1 \in \mathbb{R}_+^*, \forall t_2 \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, x_n(t_1 \cdot t_2) = x_n(t_1) \cdot x_n(t_2)$$

b) En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} (u_n(t_1 \cdot t_2) - u_n(t_1) - u_n(t_2))$$

c) Donner une relation entre $f(t_1 \cdot t_2)$, $f(t_1)$ et $f(t_2)$.

12. a) Montrer que, pour tout t réel strictement positif et tout réel h tel que $t+h$ soit strictement positif, on a :

$$f(t+h) - f(t) = f\left(1 + \frac{h}{t}\right)$$

b) Donner un développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 1. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer $f'(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$.

c) En justifiant votre réponse, exprimer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles. Donner alors le moyen de valider l'estimation de f proposée à la question8.

13. Montrer que pour tout entier naturel n, $x_n(t) = t^{\frac{1}{2^n}}$. Retrouver alors directement le résultat de 11.c).

- FIN -