36. Développements Limités

Ce qu'il faut savoir faire à l'issue de la séquence...

- *Connaître d'un développement limité à l'ordre n, les propriétés des DL*
- *Connaître la formule de Taylor Young*
- *Connaître les développements limités usuels au voisinage de 0.*
- *Utiliser une approximation numérique de la dérivée dans des algorithmes.*

Développements limités

Définition

Définition 1 ***(Développement limité)***

Soient $n \in \mathbb{N}$
Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de 0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n en 0 lorsqu'il existe $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right).$$

Le polynôme $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ est appelé la partie régulière (ou polynômiale) du développement limité.

Exemple n° 1 On sait que $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, donc $\sin(x) \underset{0}{=} x + o(x)$, et sinus admet un développement limité d'ordre 1 en 0 ($a_0 = 0$, $a_1 = 1$). Sa partie régulière est x.

Dans le chapitre sur la dérivation, on a vu que :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \iff f \text{ admet un } \mathrm{DL}_1 \text{ en } 0$$

Cela équivaut également à :
Il existe un voisinage V_0 de 0 et $\varepsilon \in \mathcal{C}^0(V_0, \mathbb{R})$ avec $\lim\limits_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$ tels que :

$$\forall x \in V_0, \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \underbrace{x\varepsilon(x)}_{o(x)}$$

Nous utiliserons la notations (courante bien que non officielle) :
« f admet un $\mathrm{DL}_n()$ en 0 » pour dire « f admet un développement limité à l'ordre n en 0 ».

Comme pour toutes les abréviations, il est recommandé d'écrire en toutes lettres dans une copie (ou de définir l'abréviation en toutes lettres à la première utilisation).

Propriétés

Propriété 1 ***(Unicité du développement limité)***

Soient $n \in \mathbb{N}, 0 \in \mathbb{R}$
f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de 0.

Si f admet un développement limité à l'ordre n en 0,
alors ce développement est unique.

Preuve : (D.A.C)

Supposons qu'il existe deux développements limités à l'ordre n en 0 :

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$
$$f(x) \underset{0}{=} b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n + o(x^n).$$

On raisonne par l'absurde et suppose que $(a_0, a_1, \dots, a_n) \neq (b_0, b_1, \dots, b_n)$.
Soit p le plus petit entier de $[\![0, n]\!]$ tel que $a_p \neq b_p$. Alors

$$(a_p - b_p)x^p + \dots + (a_n - b_n)x^n \underset{0}{=} o(x^n),$$

ce qui donne, en divisant par $x^p \neq 0$,

$$(a_p - b_p) \underset{0}{=} (a_{p+1} - b_{p+1})x + \dots + (a_n - b_n)x^{n-p} + o(x^{n-p}) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Donc $a_p = b_p$, ce qui est absurde. D'où le résultat. □

Propriété 2 ***(Troncature de développement limité)***

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 \in \mathbb{R}$
f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage de 0 admettant un développement limité à l'ordre n en 0

Alors, pour tout $p \in [\![0; n]\!]$, f admet un développement limité à l'ordre p dont la partie régulière est la troncature du DL_n de f en 0 dont on ne conserve que les termes de degré inférieur ou égal à p.

idée de preuve :

$$f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + \underbrace{a_{p+1}x^{p+1} \dots + a_n x^n + o(x^n)}_{o(x^p)}$$

Propriété 3 ***(Somme de développements limités)***

Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de 0.
telles que f et g admettent chacune un développement limité d'ordre n en 0.

Alors $f + \alpha g$ admet un développement limité d'ordre n en 0.

De plus, la partie régulière du développement limité de la combinaison linéaire $f + \alpha g$ est égale à la combinaison linéaire des parties régulières du de f et g.

Preuve :

On suppose que $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$
et $g(x) \underset{0}{=} b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.
Alors, par combinaison linéaire de ces égalités,

$$(f + \alpha g)(x) \underset{0}{=} a_0 + \alpha b_0 + (a_1 + \alpha b_1)x + \cdots + (a_n + \alpha b_n)x^n + o(x^n),$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. □

- **On ne peut pas ajouter des équivalents** .
- Mais on peut ajouter des développements limités , et c'est l'un des grands avantage de ces derniers, qui sont une écriture plus précise que les équivalents.

Propriété 4 ***(Produit de développements limités)***

Soit $n \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{R}$.
Soient f et g deux fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de 0.
telles que f et g admettent chacune un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Alors fg admet un développement limité d'ordre n en 0.

La partie régulière du développement limité de fg est obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le produit des parties régulières de f et g.

Preuve :

On suppose que $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$
et $g(x) \underset{0}{=} b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$.
Alors, par produit de ces égalités,

$$\begin{aligned}(fg)(x) &\underset{0}{=} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + o(x^n)\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j + o(x^n)\right)\\ &\underset{0}{=} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} b_j x^j\right) + o(x^n) + o(x^n) + o(x^{2n})\\ &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{i+j=k} a_i b_j x^k + o(x^n),\end{aligned}$$

d'où l'existence du développement limité et l'expression annoncée. □

Propriété 5 ***(Composition de DL)***

Si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} = 0$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$, alors $g\circ f$ admet un développement limité à l'ordre n dont la partie principale est $Q\circ P$ tronqué à l'ordre n. Autrement dit,

$$g\circ f(x) \underset{x\to 0}{=} Q\circ P(x) + o(x^n)$$

tous les monômes de $Q\circ P$ de degré strictement supérieur à n sont assimilés par le $o(x^n)$

Exemple n° 2 Donner un DL3 en 0 de $f : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$

On a :

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

Donc

$$\frac{1}{1+e^x} = \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o(x^3)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} \times \frac{1}{1+[\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}+o(x^3)]}$$

Or, $\frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + o(u^3)$ donc

$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{2}\left(1 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right) + \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{12}\right)^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{12} + \left(\frac{x^2}{4} + 2\frac{x^3}{8}\right) - \frac{x^3}{8} + o(x^3)\right) \text{ (on élimine déjà les termes de degré 4 et plus)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{24}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$\frac{1}{2} - \frac{x}{4} + \frac{1}{48}x^3 + o(x^3)$$

La formule de Taylor (cf propriété suivante) peut donner le DL éventuellement

Quand les limites sont compatibles, on peut également utiliser les développements limités pour obtenir des développements asymptotiques, valables « en $+\infty$ ».

on cherchera un changement de variable pour se ramener à une variable qui tend vers 0

Par exemple,

- $e^u \underset{u\to 0}{=} 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc

$e^{\frac{1}{x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^4} + o(x^4)$

- $u_n = \sqrt{1+n} = n\sqrt{1+\frac{1}{n}}$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\sqrt{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}u + o(u)$ donc

$u_n = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2n} + o(\frac{1}{n})\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}})$

Propriété 6 ***(DL d'une primitive)***

Soit $n\mathbb{N}^*$. Si $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + o(x^n)$, alors f est continue au voisinage de 0 et admet une primitive F.

F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ donné par :

$$F(x) = F(0) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + ... + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Formule de Taylor-Young

Propriété 7 ***(Existence d'un développement limité d'ordre 0)***

Soit $\left| \begin{array}{l} 0 \in \mathbb{R} \\ f \text{ une fonction à valeurs réelles définie en } 0 \text{ et au voisinage de ce point.} \end{array} \right.$

La fonction f est continue en 0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 0 en 0. On a alors :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + o(1).$$

Preuve : On commence par remarquer que :

$$f \text{ est continue en } 0 \iff \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) \iff f(x) \underset{0}{=} f(0) + o(1).$$

Donc si f est continue en 0, elle admet bien un développement limité d'ordre 0 en ce point. Réciproquement, s'il existe $a_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{0}{=} a_0 + o(1)$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$.
Donc $a_0 = f(0)$ et f est continue en 0. □

Propriété 8 ***(Existence d'un développement limité d'ordre 1)***

Soit $\left| \begin{array}{l} 0 \in \mathbb{R} \\ f \text{ une fonction à valeurs réelles définie en } 0 \text{ et au voisinage de ce point.} \end{array} \right.$

La fonction f est dérivable en 0 si et seulement si f admet un développement limité d'ordre 1 en 0. On a alors :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x)\ .$$

Preuve : On commence par remarquer que :

$$f \text{ est dérivable en } 0 \iff \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) \in \mathbb{R} \iff f(x) \underset{0}{=} f(0) + f'(0)x + o(x).$$

Donc si f est dérivable en 0, elle admet bien un développement limité d'ordre 1 en ce point. Réciproquement, s'il existe $(a_0, a_1) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) \underset{0}{=} a_0 + a_1 x + o(x)$, alors $\lim_{x\to 0} f(x) = a_0$, donc $a_0 = f(0)$. D'où $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} \underset{0}{=} a_1 + o(1)$, ce qui donne $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = a_1 \in \mathbb{R}$. Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$. D'où le résultat. □

En pratique, on utilise très souvent le sens direct. On utilise aussi parfois la réciproque :

S'il existe des réels a et b tels que $f(x) \underset{0}{=} a + bx + o(x)$, alors f admet un DL1(0) et donc est dérivable en 0.
La connaissance de ce DL1(0) nous donne :
- $f(0) = a$
- f est dérivable en 0
- $f'(0) = b$
- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $A(0, a)$ a pour équation $y = a + bx$

Propriété 9 ***(Formule de Taylor-Young)***

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I non réduit à un point et $0 \in I$,

alors f admet pour développement limité d'ordre n en 0

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o\left(x^n\right)$$

On peut également écrire

$$f(0+h) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(0) + o\left(h^n\right).$$

En pratique, la plupart des développements limités sont effectués au voisinage de 0. On voit donc souvent $=$ à la place de $\underset{0}{=}$ dans $\mathrm{DL}_n(0)$.
Il reste néanmoins vivement recommandé de préciser le lieu du DL.

Développements limités usuels en 0

Preuve : Toutes les formules qui suivent se montrent avec la formule de Taylor-Young, en utilisant les dérivées n-ièmes fonctions usuelles.

$$\exp(x) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\exp(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}$
$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$.

D'après la formule de Taylor-Young, l'exponentielle admet donc un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \exp(0) + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \ln(1+0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+0)^k} + o(x^n)$$
$$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Preuve : Soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \to \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $]-1,+\infty[$.
$\forall k \in [\![1,n]\!], \forall x \in]-1,+\infty[$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

D'après la formule de Taylor-Young, f admet donc un $\mathrm{DL}_n(0)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n),$$
$$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n).$$

Développement limité des fonctions puissances

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$,
$$(1+x)^\alpha \underset{0}{=} 1 + \alpha\frac{x}{1!} + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

En particulier ($\alpha = \frac{1}{2}$),
$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}(2n)!}{2^{2n}(2n-1)(n!)^2}x^n + o(x^n)$$

En particulier ($\alpha = -n$),
$$\frac{1}{(1+x)^n} \underset{0}{=} 1 - nx + \tfrac{n(n+1)}{2!}x^2 + \ldots + (-1)^k\binom{n+k-1}{k}x^k + o(x^k)$$

La formule pour $\sqrt{1+x}$ **n'est pas** à apprendre par cœur ! Par contre, savoir démontrer, par récurrence la formule donnant l'expression de la dérivée n-ième de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est un très bon exercice.
Cette remarque vaut aussi pour $\alpha = -n$.
Il faudra juste savoir retrouver une expression de DL pour $n = 2, 3\ldots$ et faire attention aux lettres (n, k...)

Développement limité des fonctions trigonométriques

$$\sin(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$
$$\sin(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}), \qquad \text{(ordre } 2n+1\text{)}$$

$$\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$
$$\cos(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \qquad \text{(ordre } 2n\text{)}$$

Les exposants $2k$ et $2k+1$ ont été introduits pour permettre d'avoir des formules simples, mais il faut garder à l'esprit que l'ordre d'un développement limité correspond à la puissance qui apparaît dans le o.

En pratique, il faut savoir retrouver les formules des $\mathrm{DL}_n(0)$ des fonctions usuelles.

Il faut connaître **sur le bout des doigts** les trois premiers termes non nuls des développements limités des fonctions de référence.

$$\arctan(x) \underset{0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Par imparité de $\arctan$, tous les termes d'ordre pairs sont nuls **et** la partie polynômiale du DL_3 est aussi la partie polynômiale du DL_4.

La formule de Taylor-Young sert

- essentiellement à obtenir des DL
- connaissant un DL, à déduire que la fonction est continue, dérivable...
- à obtenir des équivalents (en fait c'est souvent plus utile qu'un équivalent)
- à étudier des formes indéterminées
- à obtenir l'équation d'une tangente
- à étudier la position d'une courbe par rapport à une tangente.
- l'unicité des coefficients peut donner les valeurs des dérivées n-ièmes
- ...

PYTHON

Pour vérifier vos calculs, vous entraîner... il est possible d'obtenir un DL à l'aide de la librairie sympy de Python. Par exemple,

```
import sympy as sp
x, y = sp.symbols('x y')
f=x*(sp.exp(x)-1)
f.series(x,0,5)
```

donne le DL5 en 0 de $x \mapsto x\,(e^x - 1)$. Attention, `sympy` note $O(x^5)$ ce que nous noterions $o(x^4)$ et donc il faut toujours ajouter 1 à l'ordre final voulu. On peut également se fier au degré de la partie polynômiale (en faisant attention qu'il peut y avoir des coefficiens nuls)

Exemples

Exemple n° 3 Déterminer un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $x \mapsto \cos x$.

On trouve avec les formules usuelles $\boxed{\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).}$

Exemple n° 4 Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \cos x$.

On trouve avec les formules usuelles $\boxed{\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).}$

Exemple n° 5 Montrer que $f : x \mapsto \sqrt{1+2x} - e^x$ est négative au voisinage de 0.

f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0 donc admet un développement limité à l'ordre 2. Les formules usuelles donnent :

$$e^x \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+2x} \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}(2x) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{(2x)^2}{2} + o\left((2x)^2\right) \underset{0}{=} 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

d'où par sommation de développements limités,

$$\boxed{f(x) = \sqrt{1+2x} - \exp(x) \underset{0}{=} -x^2 + o(x^2)}$$

Au voisinage de 0, $f(x)$ est du signe de $-x^2$ donc négative.

On n'a aucune idée de la « taille » du voisinage.

Exemple n° 6 On suppose qu'il existe un voisinage V_0 de 0 tel que,

pour tout $x \in V_0$, $\quad f(x) = -1 + 2x + \frac{x^2}{3} + o(x^3)$.

Étudier la position relative de la courbe de $\mathcal{C}_f$ par rapport sa tangente au point d'abscisse 0 au voisinage du point de tangeance.

La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 2x - 1$ et on a : $\forall x \in V_0$,

$f(x) - (2x-1) = \frac{x^2}{3} + o(x^3)$ du signe de $\frac{x^2}{3}$ sur un voisinage $V_1 \subset V_0$ de 0 (inclus dans V_0 mais *a priori* distinct.
$\forall x \in V_1, f(x) - (2x-1) \geqslant 0$.

$\boxed{\text{La courbe est donc au dessus de sa tangente}}$

Remarque : Le DL donne des informations locales et ne suffisent en aucun cas à conclure globalement sur la position relative. cf exercices

Exemple n° 7 Déterminer un développement limité d'ordre 3 en 0 de $x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{1+x}$.

On trouve avec les formules précédentes : $\left|\begin{array}{l} \cos(x) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \\ \dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) \end{array}\right.$

d'où par produit de développements limités,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x)}{1+x} &\underset{0}{=} \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right)(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)) \\ &\underset{0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3) - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{2} + o(x^3) \\ &\underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\cos(x)}{1+x} \underset{0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$$

Exemple n° 8 Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Montrer que $f''(0)$ est bien définie et donner sa valeur.

Première idée : f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
$x \mapsto e^x$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ donc admet un DL3 en 0.
On utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 3 s'écrit :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

D'où au voisinage de 0,

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2)$$

attention : ce développement limité ne permet pas d'affirmer que f est deux fois dérivable en 0 !

Deuxième idée : On aurait donc pu se limiter dans un premier temps à un DL1 de f.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + o(x)$$

Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.
Ce DL ne permet pas d'affirmer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0, juste que f est dérivable en 0 !

Troisième idée (la bonne) :

De plus, pour tout $x \neq 0$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2}\left(x(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2}\left(x + x^2 + \frac{x^3}{2} + o(x^3) - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) \\ f'(x) &= \frac{1}{x^2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) \\ f'(x) &= \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + o(x)\end{aligned}$$

f' admet un DL1 en 0 donc est continue en 0 et que $f'(0) = \frac{1}{2}$. Ainsi, f' est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0 donc sur $\mathbb{R}$.
Ce développement limité justifie également que f' est dérivable en 0 et que $f''(0) = (f')'(0) = \frac{1}{3}$.

À retenir :
• anticiper la diminution d'ordre pour partir avec un ordre suffisant.
• Ce développement limité permet en quelques étapes simples de justifier que la fonction f est continue en 0, que son prolongement $\tilde{f}$ est dérivable en 0 et que $\tilde{f}'(0) = \frac{1}{2}$.
• on obtient donc également la

Application à l'approximation de la dérivée d'une fonction

Pour différentes raisons, on peut ne pas avoir la possibilité de définir la fonction dérivée dans Python. Par exemple :
• on ne connaît f que par des mesures discrètes et séparées.
• quand f est une fonction inconnue que l'on souhaite déterminer (cf chapitre sur les équations différentielles, méthode d'Euler)

On sait que si f est dérivable en $x \in \mathcal{D}_f$ alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f'(x)$

Ainsi, si h est suffisamment petit, on peut approcher

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Les questions qui se posent alors sont :
« Quelle est la précision de cette approximation ? »
« Quelle erreur commet-on ? »

Si f est deux fois dérivable, on a :

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) &= \frac{f(x) + hf'(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 + o(h^2) - f(x)}{h} - f'(x) \\ &= \frac{f(x) + hf'(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 + o(h^2) - f(x) - hf'(x)}{h} \\ &= \frac{f''(x)}{2}h + o(h)\end{aligned}$$

Donc l'erreur commise est de l'ordre de h. On parle d'approximation d'ordre 1.

On peut aussi « symétriser » l'approximation en s'écartant de h de chaque côté de x. Cela revient à prendre la moyenne de l'approximation obtenue en s'écartant à gauche et à droite. L'approximation est alors :

Ainsi, si h est suffisamment petit, on peut approcher

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Estimation de l'erreur :

Si f est trois fois dérivable, on a :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h} - f'(x) &= \frac{1}{h}\left(f(x) + hf'(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 + \frac{f'''(x)}{6}h^3 + o(h^3)\right. \dots \\
&\quad \left. \dots - \left(f(x) - hf'(x) + \frac{f''(x)}{2}h^2 - \frac{f^{(3)}(x)}{6}h^3 + o(h^3)\right) - 2hf'(x)\right) \\
&= \frac{1}{h}\left(\frac{f^{(3)}(x)}{3}h^3 + o(h^3)\right) \\
&= \frac{f''(x)}{2}h^2 + o(h)
\end{aligned}$$

L'erreur ici est proportionnelle à h^2 et on dit que la méthode est d'ordre 2.

__Exemple__ n° 9 On peut expérimenter avec f la fonction exponentielle, dont on sait que $f'(0) = 1$. Pour $h = 0,01$, on trouve :

$$\frac{f(0+h-f(0))}{h} \approx 1,005017 \qquad \text{et} \qquad \frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h} \approx 1,00001667$$

Exercices

ÉQUIVALENTS

exercice 1 Pour tout $r \in \mathbb{N}$, on définit « x puissance r descendante », noté $x^{\underline{r}}$ défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^{\underline{r}} = x(x-1) \times \dots \times (x-r+1) = \prod_{k=0}^{r-1}(x-k)$$

avec la convention $x^{\underline{0}} = 1$. On pose alors :

$$\forall r \in \mathbb{N}, V_r : x \mapsto x^{\underline{r}}$$

Démontrer que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1})$$

Indication : On pourra procéder par récurrence.

<u>Proposition de corrigé</u> :Notons, pour tout entier $r \geqslant 2$, $\mathcal{P}(r)$:« $x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1})$ »

- Pour $r = 2$,

$$x^{\underline{2}} = x(x-1) = x^2 - x \underset{x \to +\infty}{=} x^2 - \frac{2(2-1)}{2}x^{2-1} + o(x^{2-1})$$

Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

- Supposons $\mathcal{P}(r)$ vraie pour un entier $r \geqslant 2$. Alors

$$\begin{aligned}
x^{\underline{r+1}} = (x-r)x^{\underline{r}} &\underset{x \to +\infty}{=} (x-r)\left(x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1})\right) \\
&\underset{x \to +\infty}{=} x^{r+1} - \frac{r(r-1)}{2}x^r - \frac{r(r-1)}{2}x^{r-1} - rx^r + \frac{r^2(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^r) \\
&\underset{x \to +\infty}{=} x^{r+1} - \frac{(r+1)(r+1-1)}{2}x^{r+1-1} + o(x^{r+1-1})
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(r+1)$ est vraie.

- D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(r)$ est vraie pour tout $r \geqslant 2$.

$$\boxed{\text{pour tout entier } r \geqslant 2,\ x^{\underline{r}} \underset{x \to +\infty}{=} x^r - \tfrac{r(r-1)}{2}x^{r-1} + o(x^{r-1})}$$

BRANCHES INFINIES

exercice 2 Donner un exemple de fonction dont la courbe admet au voisinage de $+\infty$:

- une branche parabolique de direction (Ox)
- une branche parabolique de direction (Oy)
- une branche parabolique de direction $\mathcal{D} : y = \frac{x}{2}$
- une asymptote d'équation $y = -3x + 2$

exercice 3 Étudier le comportement des fonctions suivantes au voisinage précisé. En particulier on précisera s'il y en a : les tangentes, asymptotes, ou autres branches infinies.

on pourra si besoin poser $X = \frac{1}{x}$

- $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$ au voisinage de $+\infty$
- $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$ au voisinage de $+\infty$
- $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition de corrigé :

- $f(x) = \ln(1 + x + x^2) = \ln(x^2) + \ln(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}) \underset{+\infty}{=} 2\ln x + o(1)$

  Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$ et $\mathcal{C}_f$ a une branche parabolique de direction (Ox).
- Pour $x > -1$, $f(x) = 2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)$.

  Posons $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $X \to 0$ et

  $$2 - \sqrt{1+X} - \sqrt{1-X} \underset{X\to 0}{=} 2 - (1 + \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)) - (1 - \frac{X}{2} - \frac{X^2}{8} + o(X^2)) \underset{X\to 0}{=} + \frac{X^2}{4} + o(X^2)$$

  Ainsi,

  $$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \sqrt{x}\left(\frac{1}{4x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{1}{4x\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

  En particulier, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
  $\mathcal{C}_f$ admet la droite $y = 0$ comme asymptote et se situe au dessus.

  > on pourrait aussi déduire/utiliser du DL que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{4\sqrt{x}}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ donc par composition de limites,

  $$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

  De plus

  $$\frac{f(x)}{x} - \frac{1}{2} = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{1}{2} = \frac{2-1-e^{\frac{1}{x}}}{2(1+e^{\frac{1}{x}})} = \frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{2(1+e^{\frac{1}{x}})}$$

  Posons $X = \frac{1}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $X \to 0$.

  $$1 - e^X = 1 - (1 + X + o(X)) = -X + o(X)$$

  D'où

  $$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} - \frac{x}{2} = x\frac{2-(1+e^{\frac{1}{x}})}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} = x\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}$$

  Posons $X = \frac{1}{x}$. Alors si $x \to +\infty$, $X \to 0$ et comme

  $$1 - e^X = 1 - \left(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) = -X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$$

  on obtient :

  $$f(x) - \frac{1}{2}x = x\frac{-\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} = \frac{-1 - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)}{2\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$$

  Ainsi, $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ comme asymptote quand $x \to +\infty$.

exercice 4 Déterminer le développement limité à l'ordre donné au voisinage de 0 des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \ln(1+x) + e^x$ à l'ordre 3

Proposition de corrigé :
$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) = \boxed{1 + 2x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)}$

$g : x \mapsto e^x \ln(1+x)$ à l'ordre 3

Proposition de corrigé :

$$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)$$
$$g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$
$$g(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$h : x \mapsto \frac{\arctan x}{1+x}$ à l'ordre 2

Proposition de corrigé : Notons $\varphi(x) = \arctan x$
Alors $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ et $\varphi''(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

Ainsi, $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et $\varphi''(0) = 0$ et, d'après la formule de Taylor-Young, le développement limité de arctan à l'ordre 2 au voisinage de 0 est $\varphi(x) = \frac{\varphi(0)}{0!} + \frac{\varphi'(0)}{1!}x + \frac{\varphi''(0)}{2!}x^2 + o(x^2) = x + o(x^2)$

RQ : La fonction étant impaire, il était prévisible que les coefficients d'ordre pair seraient nuls.

$$h(x) = \arctan x \times \frac{1}{1+x}$$
$$h(x) = (x + o(x^3))(1 - x + x^2 + o(x^2))$$
$$h(x) = x - x^2 + o(x^2)$$

exercice 5 Montrer que la fonction f définie sur $]0,1]$ par

$$\forall x \in]0,1], \quad f(x) = \frac{2}{\sin(x)} - \frac{2}{\ln(1+x)}$$

est prolongeable par continuité en 0.

Proposition de corrigé :

On commence par tout mettre au même dénominateur pour y voir plus clair : $\forall x \in]0,1]$

On cherche donc un développement limité en 0 du numérateur (l'ordre est à déterminer pendant le calcul afin d'obtenir au moins un terme non nul).

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{\sin(x)\ln(1+x)} \\ &= 2\frac{\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-(x+o(x^2))}{(x+o(x^2))\left(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)} \\ &= 2\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} \\ &= \frac{-1+o(1)}{1+o(1)} \end{aligned}$$

On en déduit que $f(x) \underset{0}{\sim} -1$ et donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1 \in \mathbb{R}$.

La fonction f est donc prolongeable par continuité en 0.

Remarques :

• *Les équivalents usuels pouvaient donner le comportement du dénominateur.*
Toutefois, ils ne permettent par de conclure (puisqu'il est interdit de sommer des équivalents) pour le numérateur. On est alors obligés d'utiliser un DL.

• *On pouvait se contenter d'un DL du numérateur pour prouver que* $\ln(1+x)-\sin(x) \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ *et conclure par un quotient d'équivalents.*

exercice 6 Soit f la fonction définie sur $D =]1;+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+xt}\,\mathrm{d}t$. À l'aide d'un changement du changement de variables $u = xt$, montrer que f est continue sur D.

Proposition de corrigé :Pour tout réel x, $t \mapsto \frac{t}{1+xt}$ est continue sur $]-1;+\infty[$ donc $f(x)$ est bien défini pour tout $x \in D$.

Soit $x \in D$ non nul. $t \mapsto xt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc le changement de variables $u = xt$ $(\mathrm{d}u = x\,\mathrm{d}t)$ donne :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_0^1 \frac{t}{1+xt}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^1 \frac{xt}{1+xt}x\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \frac{u+1-1}{1+u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x^2}\int_0^x \left(1-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{x^2}\left(x-\ln(1+x)\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, x est continue sur $]-1;0[\cup]0;+\infty[$

Or au voisinage de 0, $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$ donc

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x^2}\left(x-\ln(1+x)\right) = \frac{1}{x^2}\left(x-(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right) = \frac{1}{2}+o(1)$$

Ainsi, f admet un DL0 en 0 donc est continue en 0

$$\boxed{f \text{ est continue sur } D}$$

on retrouve $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+0}\,\mathrm{d}t = [\frac{t^2}{2}]_0^1 = \frac{1}{2}$.

exercice 7 La fonction $f : x \mapsto \frac{x-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{x^3}$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

Proposition de corrigé :Le numérateur admet un développement limité à l'ordre 3. Pour tout $x > 0$,

$$\begin{aligned}
x-\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x} &= x-\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right)+\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{16}x^3+o(x^3)\right) \\
&= -\frac{1}{8}x^3+o(x^3)
\end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } f(x) = -\frac{1}{8}+o(1)$$

Donc f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = -\frac{1}{8}$

exercice 8 Prouver les développements asymptotiques suivants :

$$\sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{=} n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o(\frac{1}{n^3}) \qquad \text{et} \qquad (1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

Proposition de corrigé :Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\sqrt{n^2+1} = n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}$

Or, $\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$ et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, il vient :

$$\sqrt{n^2+1} = n\left(1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{8n^4} + o(\frac{1}{n^4})\right) = n + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^3} + o(\frac{1}{n^3})$$

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)\right) = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) = \mathrm{e}^1.\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}+o(x)}$$

Comme $-\frac{x}{2} \underset{0}{\to} 0$, il vient :

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e}(1 - \frac{x}{2} + o(x)) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x + o(x)$$

Ainsi, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$(1+\frac{1}{n})^n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2n} + o(\frac{1}{n})$$

---

exercice 9 Montrer que $f : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition de corrigé :f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = 1$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

Montrons que f est dérivable en 0.

$$\forall x \neq 0, \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\mathrm{e}^x-1} - 1\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x-\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x-1}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x+o(x)}\right) = \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -\frac{1}{2}$.

Montrons que f' est continue en 0

$$\forall x \neq 0, f'(x) = \frac{(\mathrm{e}^x-1) - x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2} = \frac{x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x(1+x+o(x))}{(x+o(x))^2} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{x^2+o(x^2)} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{1+o(1)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

exercice 10 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g'(x)$ pour tout x réel.

2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, qu'il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que et pour tout x non nul, on ait :

$$g^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x)}{x^{n+1}}$$

où $f^{(k)}$ désigne la dérivée k-ième de la fonction f.

Indication : On déterminera une expression de P_{n+1} et Q_{n+1} en fonction de P_n et Q_n.

Proposition de corrigé :

1. g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Étudions la fonction en 0 (il reste à montrer qu'elle est continue en 0, dérivable en 0 et que g' est continue en 0).

   La fonction sinus est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, donc de classe $\mathcal{C}^3$ et elle admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 et, pour tout réel x, $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.

   On en déduit, pour tout réel $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{1}{x}\left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right) = 1 - \dfrac{x^2}{6} + o(x^2)$.
   f admet un $DL_1(0)$ donc est dérivable en 0 (et donc est continue en 0) et $g'(0) = 0$.

   D'autre part, pour tout $x \neq 0$,
   $g'(x) = \dfrac{x\cos x - 1 \times \sin x}{x^2} = \dfrac{x(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)) - (x + o(x^2))}{x^2} = o(1) = g'(0) + o(1)$ car $g'(0) = 0$
   Ainsi, g' est continue en 0 et $\boxed{g \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.
2. g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, comme quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, le dénominateur ne s'annulant pas.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :
   $\mathcal{H}_n$:« Il existe deux polynômes P_n et Q_n tels que pour tout $x \neq 0$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x)}{x^{n+1}}$ »

   $\boxed{\text{I}}$ g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty; 0[\, \cup\,]0; +\infty[$ et, pour tout réel x non nul, on a $g'(x) = \dfrac{x\cos x - 1 \times \sin x}{x^2}$

   On a donc $P_1 = X$ et $Q_1 = -1$

   $\boxed{\text{H}}$ Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie.
   g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $]-\infty; 0[\, \cup\,]0; +\infty[$ donc $g^{(n)}$ est dérivable et, pour tout réel x non nul, on a en dérivant l'expression de $\mathcal{H}_n$,

$$\begin{aligned} g^{(n+1)}(x) &= \frac{(P_n'(x)\cos(x) - P_n(x)\sin(x) + Q_n'(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x))x^{n+1} - (n+1)x^n(P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x))}{(x^{n+1})^2} \\ &= \frac{(P_n'(x)\cos(x) - P_n(x)\sin(x) + Q_n'(x)\sin(x) + Q_n(x)\cos(x))x - (n+1)(P_n(x)\cos(x) + Q_n(x)\sin(x))}{x^{2n+2-n}} \\ &= \frac{(xP_n'(x) + xQ_n(x) - (n+1)P_n(x))\cos(x) + (-xP_n(x) + xQ_n'(x) - (n+1)Q_n(x))\sin(x)}{x^{n+2}} \end{aligned}$$

   En posant $P_{n+1} = XP_n' + XQ_n - (n+1)P_n$ et $Q_{n+1} = -XP_n + XQ_n' - (n+1)Q_n$, P_{n+1} et Q_{n+1} sont des polynômes et $\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

   $\boxed{\text{C}}$ D'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 1 : l'énoncé précise $n \geq 1$ mais le résultat est vrai aussi pour $n = 0$ et si tel avait été l'énoncé, on aurait initialisé avec $P_0 = 0$ et $Q_0 = 1$

Remarque 2 : Noter qu'on ne demande pas l'expression du polynôme. Par contre dans un autre sujet, on aurait pu demander le coefficient dominant...

exercice 11 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, G(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad G(0) = f(0)$$

1. Justifier que G est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. Calculer G' sur $\mathbb{R}^*$
2. On suppose ensuite que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   a. En déduire que G est dérivable en 0, et calculer $G'(0)$.
   b. L'application G est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?.

Proposition de corrigé :

1. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle admet une primitive F sur $\mathbb{R}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
$$G(x) = \frac{1}{2x}\left(F(x) - F(-x)\right).$$
Ainsi, $G(x) = \frac{1}{2x}\left(F(x) - F(0) - (F(-x) - F(0))\right)$

$\boxed{\text{V1}}$
$$G(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{F(x)-F(0)}{x-0} + \frac{(F(-x)-F(0)}{-x-0}\right)$$
$$G(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\left(F'(0) + F'(0)\right)$$
$$\lim_{x\to 0} G(x) = \frac{1}{2}\left(f(0) + f(0)\right) = f(0)$$
On a bien $\lim\limits_{x\to 0} G(x) = F(0)$ ce qui prouve la continuité en 0 de G
et donc la continuité de G sur $\mathbb{R}$

G est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

$\boxed{\text{V2}}$ Variante : Comme F est de classe $\mathcal{C}^1$, elle admet un DL_1 au voisinage de 0 et, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\begin{aligned}
F(x) &= F(0) + F'(0)x + o(x) \\
F(x) &= F(0) + f(0)x + o(x). \\
\text{Ainsi,}\quad F(-x) &= F(0) - f(0)x + o(x) \\
\text{D'où}\quad G(x) &= \tfrac{1}{2x}\left(F(0) + f(0)x + o(x) - F(0) + f(0)x + o(x)\right) \\
G(x) &= f(0) + o(1) \\
G(x) &= G(0) + o(1)
\end{aligned}$$
G est donc continue en 0.

Pour tout $x \neq 0$,
$$G'(x) = \frac{-1}{2x^2}\left(F(x) - F(-x)\right) + \frac{1}{2x}\left(F'(x) + F'(-x)\right)$$
$$G'(x) = \frac{1}{2x}\left(f(x) + f(-x) - 2G(x)\right)$$

2. a. f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ donc admet un développement limité à l'ordre 2 en 0, et la formule de Taylor-Young donne, pour x au voisinage de 0 :
$$\begin{aligned}
F(x) &= F(0) + F'(0)x + \tfrac{F''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \\
F(x) &= F(0) + f(0)x + \tfrac{f'(0)}{2}x^2 + o(x^2)
\end{aligned}$$

b. Sur le même voisinage de 0, on a : Ainsi,

$$\begin{aligned} G(x) &= \frac{1}{2x}\left(F(0)+f(0)x+\frac{f(0)}{2}x^2+o(x^2)-(F(0)+f(0)(-x)+\frac{f'(0)}{2}(-x)^2+o(x^2))\right) \\ G(x) &= \frac{1}{2x}\left(2f(0)x+o(x^2)\right) \\ G(x) &= f(0)+o(x) \end{aligned}$$

Finalement, G admet un DL_1 en 0, et G est dérivable en 0 et $G'(0)=0$ par unicité des coefficients d'un DL.

Remarque : On pouvait aussi utiliser le DL de G pour étudier $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{G(x)-G(0)}{x}$

c. On a vu en 1) que

$$\begin{aligned} G'(x) &= \frac{1}{2x}\left(f(x)+f(-x)-2G(x)\right) \\ G'(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(f(0)+xf'(0)+f(0)-xf'(0)+o(x)-2(f(0)+o(x))\right) \\ G'(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2x}\left(o(x)\right)) \\ G'(x) &\underset{x\to 0}{=} o(1) \end{aligned}$$

On a bien $\lim\limits_{x\to 0} G'(x)=G'(0)$ donc G' est continue en 0 et G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

---

exercice 12 On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x\leqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que f admet un développement limité à tout ordre en 0.

<u>Proposition de corrigé</u> :Dans un exercice précédent, on a prouvé que la dérivée n-ième de f a une expression de la forme : $\forall x>0,\quad f^{(n)}(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ où P et Q sont des fonctions polynômiales. Nous avions prouvé que toutes ces dérivées s'annulaient en 0. Pas besoin de re-prouver cela.

Il suffit de prouver que $f(x)=o(x^n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}=\left(\frac{1}{x}\right)^n\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$
Or, $\lim\limits_{u\to+\infty} u^n\mathrm{e}^{-u}=0$ par croissances comparées.
$\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{x^n}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$ donc $f(x)=o(x^n)$.

$\boxed{f \text{ admet donc un développement limité à l'ordre } n \text{ (de partie principale nulle).}}$

> Il existe donc une fonction **non nulle** donc le développement limité à tout ordre a une partie principale nulle.

exercice 13 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f_n définie sur $]0;+\infty[$ par $f_n(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)$.

1. Trouver trois réels a, b, c tels que, au voisinage de $+\infty$:

$$\ln\left(1+\frac{n}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{a_n}{x} + \frac{b_n}{x^2} + \frac{c_n}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

2. En déduire que que la courbe $\mathcal{C}_n$ représentative de f_n admet une asymptote oblique $\mathcal{D}_n$ au voisinage de $+\infty$ dont on donnera l'équation

3. Préciser les positions relative de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{D}_n$ au voisinage de $+\infty$.

Proposition de corrigé :

1. $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $]-1;+\infty[$ donc admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et on a :
$\ln(1+t) \underset{t\to0}{=} t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$
Or,pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n}{x} = 0$ donc, avec $t = \frac{n}{x}$, on trouve :
$\ln(1+\frac{n}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{n}{x} - \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{n}{x}\right)^3}{3} + o\left(\frac{1}{x}\right)^3$
$\ln(1+\frac{n}{x}) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{n}{x} - \frac{n^2}{2x^2} + \frac{n^3}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x}\right)^3$

2. Le DL précédent donne :
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x^2\left(\frac{n}{x} - \frac{n^2}{2x^2} + \frac{n^3}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x}\right)^3\right)$
$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \underset{x\to+\infty}{=} nx - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$
Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} \left| f(x) - \left(nx - \dfrac{n^2}{2}\right)\right| = 0$ ce qui prouve que
$\boxed{\mathcal{C}_n \text{ admet une asymptote oblique } \mathcal{D}_n \text{ au voisinage de } +\infty \text{ d'équation } y = nx - \frac{n^2}{2}}$

3. $f(x) - \left(nx - \frac{n^2}{2}\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{n^3}{3x} + o\left(\frac{1}{x}\right) > 0$ au voisinage de $+\infty$
$\boxed{\mathcal{C}_n \text{ est au dessus de } \mathcal{D}_n \text{ au voisinage de } +\infty}$

Ici encore, le développement asymptotique ne permet de répondre qu'au voisinage de $+\infty$. Pour conclure de manière plus globale, il faudrait mener une étude de fonctions.

exercice 14 **ESSEC 2002 (fragment)**

On associe à tout point $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ le polynôme $P(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$.

1. ♥ Établir la relation suivante pour tout nombre réel x distinct de $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x-a_j}$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x-a_i}$ (on pourra poser $x = a_i + t$).

2. Déterminer à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé) le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des deux fonctions suivantes :

$$f(t) = tP'(a_i+t) - P(a_i+t) \qquad ; \qquad g(t) = tP(a_i+t)$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x-a_i}$

3. Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité :

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{a_i-a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$$

Proposition de corrigé :

1. Notons $D = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall i \in [\![1;n]\!], x \neq a_i\}$. $g : x \mapsto \ln(|P(x)|)$ est bien définie, et dérivable comme composée de fonctions dérivables et, pour tout $x \in D$, on a :

$$g(x) = \ln(|P(x)|) = \sum_{j=1}^{n} \ln|x-a_j|$$

$$g'(x) = \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x-a_j}$$

d'où le résultat

Soit $i\, [\![1;n]\!]$. $\forall x \in D$, $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x-a_i} = \displaystyle\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{x-a_j}$.

Pour tout $j \in [\![1;n]\!]$ distinct de i, $\displaystyle\lim_{x\to a_i} \frac{1}{x-a_j} = \frac{1}{a_i-a_j}$. Ainsi, ar sommes de limites,

$$\boxed{\forall i\, [\![1;n]\!],\ \lim_{x\to a_i} \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x-a_i} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \frac{1}{a_i-a_j}}$$

2. formule de Taylor-Young :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I non réduit à un point et $0 \in I$, alors f admet pour développement limité d'ordre n en 0, c'est à dire :
   $$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + o\left(x^n\right)$$

   P est polynômiale donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et admet des développements limités à tout ordre.

   Comme $P(a_i) = 0$, on a :
   $P(a_i + t) = P'(a_i)t + \frac{1}{2}P''(a_i)t^2 + o(t^2)$ et $tP(a_i + t) = P'(a_i)t^2 + o(t^2)$
   $P'(a_i + t) = P'(a_i) + P''(a_i)t + o(t)$ et $tP'(a_i + t) = P'(a_i)t + P''(a_i)t^2 + o(t^2)$

   On trouve alors :
   $$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t)$$
   $$f(t) \underset{0}{=} P'(a_i)t + P''(a_i)t^2 - (P'(a_i)t + \frac{1}{2}P''(a_i)t^2) + o(t^2)$$
   $$f(t) \underset{0}{=} \frac{1}{2}P''(a_i)t^2 + o(t^2)$$
   $$g(t) = P(a_i + t) \underset{0}{=} P'(a_i)t^2 + o(t^2)$$

   $$\boxed{f(t) \underset{0}{=} \tfrac{1}{2}P''(a_i)t^2 + o(t^2)} \quad \boxed{g(t) \underset{0}{=} P'(a_i)t^2 + o(t^2)}$$
   $$\frac{P'(a_i + t)}{P(a_i + t)} - \frac{1}{t} = \frac{tP'(a_i + t) - P(a_i + t)}{tP(a_i + t)} = \frac{f(t)}{g(t)} \underset{0}{=} \frac{\frac{1}{2}P''(a_i)t^2 + o(t^2)}{P'(a_i)t^2 + o(t^2)} \underset{0}{=} \frac{\frac{1}{2}P''(a_i) + o(1)}{P'(a_i) + o(1)} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$$
   Donc avec le changement de variable $x = a_i + t$,
   $$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(t)} = \lim_{x \to a_i} \frac{P'(x)}{P(x)} - \frac{1}{x - a_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j}$$

3. Avec **1)**, par unicité de la limite, $$\boxed{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}}$$