Ce qu'il faut savoir faire à l'issue de la séquence...

- ◻ *Prouver un équivalence*
- ◻ *Prouver une négligeabilité*
- ◻ *Connaître les équivalences/négligeabilités classiques.*
- ◻ *Utiliser l'équivalence et la négligeabilité pour déterminer une limite.*
- ◻ *Connaître et utiliser les relations de négligeabilité classiques*
- ◻ *Connaître et utiliser les équivalents classiques*
- ◻ *Connaître et utiliser les opérations sur les équivalences et négligeabilités.*

23 Comparaison de suites, Comparaison de fonctions

Dans tout le chapitre, on notera $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble constitué de $\mathbb{R}$, $+\infty$ et $-\infty$.

Suites équivalentes

DÉFINITION

Définition 1 ***(Suites équivalentes)***

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que u et v sont équivalentes

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ ou $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ ou encore $u_n \sim v_n$ s'il n'y a pas ambiguïté.

L'équivalence ne parle que de ce qui se passe au voisinage de l'infini.

Exemple n° 1 Donner un équivalent des suites de terme général

$$\frac{2n^2-n+6}{3n^3-1} \quad \text{et} \quad \frac{(1-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)}.$$

$\dfrac{2n^2-n+6}{3n^3-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3n}$. En effet, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2-n+6}{3n^3-1}\times\frac{3n}{2}\right)=1.$

$\dfrac{(1-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)} \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$. En effet, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)(n+6)}{(n+1)(n+2)(2n+3)}(-2n)=1.$

PROPRIÉTÉS DES SUITES ÉQUIVALENTES

Propriété 1 ***(Transitivité des équivalents)***

Soit u, v et w trois suites. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n$.

On peut alors noter : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$

Propriété 2 ***(Équivalents et limites)***

Soit u et v deux suites. Soit $\ell\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n=\ell \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n=\ell$$

Preuve :

- Si u converge vers $\ell\neq 0$, alors $\left(\frac{u_n}{\ell}\right)$ converge vers 1 et donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ell$.

- Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$.
  Alors existe une suite ϕ qui converge vers 1 et un entier n_0 tels que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = v_n\phi_n$.
  On suppose que v converge vers un réel ℓ.
  Alors par limite d'un produit, u converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \times 1 = \ell$. □

Propriété 3 ***(Produit et quotient d'équivalents)***

Soit α un réel, et u, v, w et t quatre suites (ne s'annulant pas). telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} t_n$,

alors $$u_n w_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n t_n. \text{ et } \frac{u_n}{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{v_n}{t_n}.$$

si u_n^α est bien défini, alors aussi
$$u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$$

Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les suites si $\alpha \in \mathbb{N}$, pour toutes les suites ne s'annulant pas si $\alpha \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$ et pour toutes les suites strictement positives si $\alpha \in \mathbb{R}$.

Preuve : Les deux derniers résultats se démontrent simplement en revenant à la définition des équivalents. □

ATTENTION ! Toute autre opération sur les équivalents est interdite, notamment la **composition à gauche** et la **somme** sont prohibés.

Équivalents usuels

Propriété 4 ***(Équivalents usuels)***

Soit u une suite convergeant vers 0 et α un réel non nul fixé. Alors :

$$\ln(1+u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad e^{u_n}-1 \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$$
$$\sin u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n \qquad \cos(u_n) - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{u_n^2}{2}$$

Exemple n° 2 Montrer que pour tout réel x,
$$\lim_{n\to+}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$$

On ne peut pas utiliser $(1+u_n)^\alpha - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \alpha u_n$ car α ne peut pas dépendre de n.
On passe alors sous forme exponentielle :
$$\forall n \geqslant 1, \quad \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

On est donc ramenés à étudier la limite de $n\ln(1+\frac{1}{n})$.

Comme $\frac{x}{n}$ converge vers 0, $\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$ et on trouve par produit avec n :
$$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{x}{n} = x.$$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = 1$ et par composition de limite avec l'exponentielle (continue en x), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^x$.

Pas d'équivalent **dans** l'exponentielle !!

Exemple n° 3 Calculer la limite de la suite définie pour $n \geqslant 2$ par $u_n = \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n}$.

Comme pour l'exemple précédent, on passe sous forme exponentielle :
$$\forall n \geqslant 2, \quad \left(1-\frac{2}{n}\right)^{3n} = \exp\left(3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)\right).$$

On est donc ramenés à étudier la limite de $3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right)$.

Comme $-\frac{2}{n}$ converge vers 0 et par produit d'équivalents :
$$3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 3n\left(\frac{-2}{n}\right) = -6.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n\ln\left(1-\frac{2}{n}\right) = -6$ et par composition de limite avec l'exponentielle (continue en -6), $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^{-6}$.

Propriété 5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout réel x,
$$P(x) = \sum_{k=p}^{q} a_k x^k \text{ avec } p \leqslant q \text{ et } a_p \neq 0 \text{ et } a_q \neq 0.$$
Alors
- si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, $P(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_p u_n^p$
- si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \pm\infty$, $P(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} a_q u_n^q$

<u>*Exemple*</u> *n° 4* Ce résultat s'applique évidemment aux polynômes en n. Voyons deux exemples plus fins :

$(\ln(1+\frac{1}{n}))^3 - 2\ln(1+\frac{1}{n}) \sim -2\ln(1+\frac{1}{n})$ (polynôme en $\ln(1+\frac{1}{n}) \to 0$)
$(\sqrt{n^2+1})^5 - 3(\sqrt{n^2+1})^3 \sim \sqrt{n^2+1}^5$ (polynôme en $\sqrt{n^2+1} \to +\infty$)

Nous retrouverons une autre version de ceci avec les négligeabilités.

Propriété 6 ***(Équivalent des coefficients binômiaux)***

Soit $k \in \mathbb{N}$. Alors $\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.

Attention, cette relation est vraie pour un entier k fixé,
donc k ne peut pas dépendre de n.

Preuve :

On écrit : $\forall n \geqslant k, \quad \binom{n}{k} = \frac{1}{k!}n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$

Or $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n-1, \quad n \underset{n\to+\infty}{\sim} n-2, \quad \dots \quad , \quad n \underset{n\to+\infty}{\sim} n-k+1.$
Donc par produit (fini) d'équivalents, $n(n-1)(n-2)\ \dots\ (n-k+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^k$
Il suffit alors de diviser par $k!$ pour obtenir le résultat annoncé. □

Exemple n° 5 Soit $p \in]0,1[$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires réelles, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{p}{n}\right)$. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n = k)$.

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant k, \quad P(X_n = k) &= \binom{n}{k}\left(\frac{p}{n}\right)^k\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-k}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}\frac{p^k}{n^k}\left(1-\frac{p}{n}\right)^{n-k}\\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p^k}{k!}\exp\left((n-k)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right)\right)\end{aligned}$$

Or $\frac{p}{n}$ converge vers 0, donc $(n-k)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} (n-k)\left(-\frac{p}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -p.$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-k)\ln\left(1-\frac{p}{n}\right) = -p.$

En composant par l'exponentielle (continue en $-p$) puis par produit, on trouve :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P(X_n = k) = \frac{p^k e^{-p}}{k!}}$$

Nous verrons en fin d'année que ce cas limite correspond en fait à une loi dite « de Poisson »

Suites négligeables

DÉFINITION

Définition 2 ***(Suites négligeables)***

Soient u et v deux suites telles que v ne s'annule pas.
On dit que u est <u>négligeable</u> devant v lorsqu'il existe une suite ε et un entier n_0 tels que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = 0$$

On note alors $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$ s'il n'y a pas ambiguïté.

On prononce "u_n est un petit o de v_n".

PROPRIÉTÉS

Propriété 7 ***(Somme et produit de suites négligeables)***

Soit u, v et w trois suites et λ un réel. Alors :

- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $\lambda u_n + v_n = o(w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ alors $u_n v_n = o(w_n v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et si u_n^α et v_n^α sont bien définis, alors $u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$.

Le cas $\alpha = 0$ est exclu car les deux suites u_n^α et v_n^α sont alors constantes et égales à 1.

$\alpha < 0$ n'est pas possible non plus par exemple $n = o(n^2)$ et $\alpha = -1$

Ce résultat est en particulier vrai pour toutes les suites si $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Propriété 8 ***(Suites négligeables et équivalents)***

Soit u, v et w trois suites. $$\left.\begin{array}{c} u_n = o(v_n) \\ v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} w_n \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u_n = o(w_n)$$

Propriété 9 ***(Transitivité des suites négligeables)***

Soit u, v et w trois suites. $$\left.\begin{array}{c} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad u_n = o(w_n)$$

On peut noter : $u_n = o(v_n) = o(w_n)$

Propriété 10 ***(Suite négligeable devant 1)***

Soit u une suite. $$u_n = o(1) \iff \lim_{n\to+\infty} u_n = 0$$

Propriété 11

Soit (u_n) et (v_n) deux suites :
$$u_n \sim v_n \iff |\, u_n\,| = o(|\, v_n\,|)$$

Propriété 12

Soit $(u_n), (v_n)$ et (w_n) trois suites :
$$u_n = v_n + o(w_n) \iff v_n = u_n + o(w_n)$$

***Exemple** n° 6* Soit (u_n) une suite qui vérifie :

$$u_n = -2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Déterminer les limites de $(u_n)_n$, $((u_n+2)n)_n$ et $\left(\left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right)n^2\right)_n$.

- On sait que $o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge vers 0,
donc par somme de limites u converge vers -2.
- De même, $(u_n+2)n = 3 + \frac{4}{\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \to 3$.
- Enfin, par croissances comparées : $\left(u_n + 2 - \frac{3}{n}\right)n^2 = \frac{4n}{\ln n} + o\left(1\right) \to +\infty$.

***Exemple** n° 7* On suppose que $u_n = 2 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o(1)$.
Simplifier au maximum cette expression.

On commence par gérer les petits o : $\dfrac{\frac{1}{n^2}}{1}$ converge vers 0, donc $\frac{1}{n^2} = o(1)$ et $u_n = 2 + \frac{1}{n} + o(1)$. On remarque ensuite que $\frac{1}{n} = o(1)$, donc $\boxed{u_n = 2 + o(1)}$.

Propriété 13 ***(lien utile entre négligeabilité et équivalences)***

Soit (u_n) et (v_n) deux suites.

$$\begin{aligned} u_n \sim v_n &\iff u_n = v_n + o(v_n)\\ &\iff v_n = u_n + o(u_n)\\ &\iff u_n = v_n + o(u_n)\\ &\iff v_n = u_n + o(v_n) \end{aligned}$$

Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, pour n suffisamment grand, on a $u_n \sim v_n \iff \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \iff \frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1) \iff u_n = v_n + o(v_n)$

Exemples de référence

Propriété 14

On a :

$$\begin{aligned} n^\alpha &= (n^\beta) && \text{lorsque } \alpha < \beta,\\ (\ln n)^\beta &= o(n^\alpha) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0,\\ n^\alpha &= o(a^n) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } a > 1,\\ a^n &= o(b^n) && \text{lorsque } |\,a\,| < |\,b\,|,\\ a^n &= o(n!) && \text{lorsque } a \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

De manière générale, on peut se servir de toutes les croissances comparées pour l'étude asymptotique d'une suite. On les rappelle ci-dessous (dans un produit, le comportement de la colonne de plus faible numéro l'emporte) :

$\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$	$q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$	$b > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = +\infty$	$0 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$	$\lvert q \rvert > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{q^n} = 0$	$a < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = 0$	$b < 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = 0$	$\lvert q \rvert < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

Le corollaire suivant est en particulier très utile :

Propriété 15

Pour tout réel $\alpha > 0$.

$$\forall q \in]-1,1[, \quad q^n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Preuve : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{\frac{1}{n^\alpha}} = \lim\limits_{n\to+\infty} q^n n^\alpha = 0$ par croissances comparées, d'où le résultat. $\square$

Les notions de suites équivalentes et négligeables serviront très souvent en deuxième année pour justifier des convergences de séries, d'intégrales, en probabilités...

Pour résumer, ils servent à décrire le comportement à l'infini d'une suite.

Fonctions équivalentes

Définition et première caractérisation

Définition 3 ***(Fonctions équivalentes au voisinage d'un point)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_{x_0} un voisinage de x_0.
f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur V_{x_0} telle que g ne s'annule pas.

On dit que f et g sont <u>équivalentes au voisinage de</u> x_0 telle que
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$.

Propriétés

Propriété 16 ***(Transitivité des équivalents)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_{x_0} un voisinage de x_0.
f, g et h trois fonctions à valeurs réelles, définies sur V_{x_0}.

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \\ g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$$

On peut donc noter :
$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \underset{x_0}{\sim} h(x)$$

Propriété 17 ***(Équivalents et limites)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_{x_0} un voisinage de x_0.
f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur V_{x_0}.

- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{\sim} \ell.$
- $\left.\begin{array}{r} f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \\ \displaystyle\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Longrightarrow \displaystyle\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Propriété 18 ***(Équivalents et signe de la fonction)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_{x_0} un voisinage de x_0.
f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur V_{x_0}.

Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et si f est positive au voisinage de x_0, alors g l'est également.

Propriété 19 ***(Produit et quotient d'équivalents)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, et f_1, f_2, g_1, g_2 des fonctions à valeurs réelles, définies et ne s'annulant pas sur sur un voisinage V_{x_0} de x_0. Si $f_1(x) \underset{x_0}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x_0}{\sim} g_2(x)$

Alors

$$(f_1 f_2)(x) \underset{x_0}{\sim} (g_1 g_2)(x)$$

et

$$\frac{f_1}{f_2}(x) \underset{x_0}{\sim} \frac{g_1}{g_2}(x)$$

Propriété 20 ***(Équivalents et passage à la valeur absolue)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } V_{x_0} \text{ un voisinage de } x_0. \\ f \text{ et } g \text{ deux fonctions à valeurs réelles, définies sur } V_{x_0}. \end{array} \right.$

Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $|\, f(x)\,| \underset{x_0}{\sim} |\, g(x)\,|$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ alors $f^n(x) \underset{x_0}{\sim} g^n(x)$.

Si f et g sont strictement positives sur V_{x_0}, alors pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $f^\alpha(x) \underset{x_0}{\sim} g^\alpha(x)$.
En particulier, $\sqrt{f(x)} \underset{x_0}{\sim} \sqrt{g^\alpha(x)}$

ATTENTION ! Toute autre opération est interdite, notamment la composition d'un équivalent par une fonction et la somme d'équivalents.

ÉQUIVALENTS USUELS

Propriété 21 ***(Équivalents usuels au voisinage de zéro)***

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$ fixé,

$$\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x, \qquad e^x - 1 \underset{0}{\sim} x, \qquad (1+x)^\alpha - 1 \underset{0}{\sim} \alpha x$$

$$\sin x \underset{0}{\sim} x, \qquad \cos x - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}x^2,$$

Propriété 22

Soit $P : x \mapsto \sum_{k=}^{n} a_k x^k$ (avec $a_n \neq 0$) une fonction polynômiale. Alors

$$P(X) \underset{+\infty}{\sim} a_n x^n$$

Exemple n° 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\sin(2x)}{x^2}$.
Déterminer un équivalent de f au voisinage de 0.

Comme $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$, les équivalents précédents donnent $\sin(2x) \underset{0}{\sim} 2x$. En divisant par x^2 qui ne s'annule pas au voisinage de 0, on trouve :

$$\boxed{\frac{\sin(2x)}{x^2} \underset{0}{\sim} \frac{2}{x}}$$

Exemple n° 9 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.
Déterminer un équivalent de g au voisinage de $+\infty$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, les équivalents précédents donnent directement

$$\boxed{g(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.}$$

Fonction négligeable devant une autre fonction

DÉFINITION ET PREMIÈRE CARACTÉRISATION

Définition 4 ***(Fonction négligeable devant une autre fonction)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_{x_0} un voisinage de x_0.
f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur V_{x_0}, g ne s'annulant pas.

On dit que f est <u>négligeable devant</u> g au voisinage de x_0 lorsqu'il existe une fonction ε définie sur V_{x_0} telle que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

On note alors $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x))$

Propriétés

Propriété 23 ***(Transitivité des fonctions négligeables)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } V_{x_0} \text{ un voisinage de } x_0. \\ f, g \text{ et } h \text{ trois fonctions à valeurs réelles, définies sur } V_{x_0}. \end{array} \right.$

$$\left.\begin{array}{rcl} f(x) & \underset{x_0}{=} & o(g(x)) \\ g(x) & \underset{x_0}{=} & o(h(x)) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \underset{x_0}{=} o(h(x))$$

On peut donc noter : $f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \underset{x_0}{=} o(h(x))$

Propriété 24 ***(Fonction négligeable devant 1)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } V_{x_0} \text{ un voisinage de } x_0. \\ f \text{ une fonction à valeurs réelles, définies sur } V_{x_0}. \end{array} \right.$

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(1) \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Propriété 25 ***(Somme et produit de fonctions négligeables)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } V_{x_0} \text{ un voisinage de } x_0. \\ f_1, f_2, g_1, g_2 \text{ des fonctions à valeurs réelles, définies sur } V_{x_0}. \end{array} \right.$

- $\left.\begin{array}{rcl} f_1(x) & \underset{x_0}{=} & o(g_1(x)) \\ f_2(x) & \underset{x_0}{=} & o(g_1(x)) \end{array}\right\} \Longrightarrow (f_1 + f_2)(x) \underset{x_0}{=} o(g_1(x)).$
- $\left.\begin{array}{rcl} f_1(x) & \underset{x_0}{=} & o(g_1(x)) \\ f_2(x) & \underset{x_0}{=} & o(g_2(x)) \end{array}\right\} \Longrightarrow f_1 f_2(x) \underset{x_0}{=} o(g_1 g_2(x)).$

Propriété 26 ***(Fonctions négligeables et passage à la valeur absolue)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in \overline{\mathbb{R}} \text{ et } V_{x_0} \text{ un voisinage de } x_0. \\ f \text{ et } g \text{ deux fonctions à valeurs réelles, définies sur } V_{x_0}. \end{array} \right.$

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \Longrightarrow |\, f(x)\,| \underset{x_0}{=} o(|\, g(x)\,|)$$

Propriété 27 ***(Fonctions négligeables et passage à la puissance)***

Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ et V_{x_0} un voisinage de x_0.
f et g deux fonctions à valeurs réelles, définies sur V_{x_0}.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \Longrightarrow f^n(x) \underset{x_0}{=} o(g^n(x))$$

Si de plus f et g sont strictement positives sur V_{x_0}, alors

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad f^\alpha(x) \underset{x_0}{=} o(g^\alpha(x))$$

Négligeabilités classiques

Propriété 28 ***(Négligeabilités classiques)***

$$\begin{aligned}
x^\alpha &\underset{+\infty}{=} o(x^\beta) && \text{lorsque } \alpha < \beta,\\
x^\beta &\underset{0}{=} o(x^\alpha) && \text{lorsque } \alpha < \beta,\\
(\ln x)^\beta &\underset{+\infty}{=} o(x^\alpha) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0,\\
(\ln |\, x \,|)^\beta &\underset{0}{=} o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } \beta > 0,\\
x^\alpha &\underset{+\infty}{=} o(a^x) && \text{lorsque } \alpha > 0 \text{ et } a > 1,\\
a^x &\underset{+\infty}{=} o(b^x) && \text{lorsque } |\, a \,| < |\, b \,|
\end{aligned}$$

Exemple n° 10 Pour α réel et $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\beta x}}{x^\alpha} = +\infty$ par croissances comparées.

Exemple n° 11 Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ par croissances comparées.

Exemple n° 12 Pour $\alpha > 0$ et β réel, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta = 0$.
C'est également une croissance comparée, un peu déguisée. En effet,

$$\lim_{x \to 0^+} x^\alpha (\ln x)^\beta \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim_{y \to +\infty} \frac{(-\ln(y))^\beta}{y^\alpha} = 0.$$

Branches infinies

Définition 5

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. On dit que la courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = ax + b$ pour asymptote au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$.

Point méthode : Pour étudier les branches infinies de la courbe représentative de f,

1 $\boxed{\text{On étudie } \frac{f(x)}{x}.}$

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy).

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$, on passe à l'étape 2.

2 $\boxed{\text{on étudie } f(x) - ax.}$

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = ax$.

• Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - ax = b$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de $\mathcal{C}_f$.

Toute ce qui précède se généralise quand $x \to -\infty$

Pour prouver que l'on a une asymptote, on peut prouver que $f(x) = ax + b + o(1)$.

Exemple n° 13 Au voisinage de $+\infty$

• $f(x) = \sqrt{1+x^3}$. $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy)

• $f(x) = \ln(1+\mathrm{e}^x)$. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = x$

• $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1}$. $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote d'équation $y = 2x$

• $f(x) = \sqrt{4x^2+x+1} + \sqrt{x}$. $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction $y = 2x$

• $f(x) = \ln(x)$. $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Ox)

• $f(x) = x^2$. $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique de direction (Oy)

ans les rapports

ECRICOME 2017 : On remarque également des équivalents faux.
Par exemple $(n+1)^{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} n^n$

ECRICOME 2018 : Cette question est peu traitée et en général très mal traitée. La détermination d'un équivalent de u_n permet de conclure rapidement.

ECRICOME 2019 : Si l'équivalent de $\ln(1+u)$ est relativement bien connu, celui de $1-\cos(x)$ l'est beaucoup moins.

ECRICOME 2019 : La composition des équivalents n'est pas possible. L'utilisation propre des équivalents obtenus à la question précédente est attendue avec une justification correcte. Certains ont admis l'équivalent pour prouver la deuxième partie de la question. La rédaction de cette limite doit être à nouveau très soignée. Ainsi les écritures suivantes et **fausses** indiquent une incompréhension des notions abordées :
$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^n = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sqrt{n}}$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos\left(\cos\left(n^{-\frac{1}{4}}\right)\right)^n = \mathrm{e}^{-\infty} = 0$

Exercices

exercice 1 Soit $x\in\mathbb{R}$. Justifier que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$$

Proposition de corrigé :
Soit $x\in\mathbb{R}$.
Il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant n_0$, $\left|\frac{x}{n}\right|<1$.
Pour $n\geqslant n_0$, on a :

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{x}{n})\right)$$

Or, comme $\frac{x}{n}\to 0, \ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{x}{n}$
et $n\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} x \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x$
Par continuité de l'exponentielle,
$\exp\left(n\ln(1+\frac{x}{n})\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^x$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x}$$

exercice 2
Simplifier les expressions suivantes :

- $u_n = n^2 + \dfrac{3n+1}{n^2} + \dfrac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\dfrac{1}{n}\right) + o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)$

On a $\left|\begin{array}{l} o\left(\dfrac{1}{n}\right) = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right) \text{ et } \dfrac{1}{\sqrt{n}} = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right) \\ \dfrac{3n+1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{n} = o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)\end{array}\right.$ donc $\boxed{u_n = n^2 + o\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)}$

• $v_n = \dfrac{3n+4}{n^2} + \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$v_n = \dfrac{3}{n} + \dfrac{4}{n^2} + \dfrac{1}{e^n} + \dfrac{1}{\sqrt{n}\ln n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

Comme $\dfrac{4}{n^2} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$ et $\dfrac{1}{e^n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right)$

$$\boxed{v_n = \frac{3}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}\ln n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

• $w_n = \dfrac{3n+n^2}{n^2} + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$w_n = 1 + \dfrac{3}{n} + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$

$\dfrac{3}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ et $\dfrac{\ln(n)}{n} = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$ donc

$$\boxed{w_n = 1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$$

point méthode : Tout ce qui est négligeable se range dans le « petit o le plus grand ». Les termes d'ordre plus grand ou même ordre que ce petit o doivent être conservés.

Proposition de corrigé :

---

exercice 3

1. Donner un équivalent simple de la suite de Fibonacci définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

on rappelle le TG de (u_n), qu'il faut savoir démontrer :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$

Notons $q_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

$\boxed{\text{V1}}$ $|\,q_1\,| < |\,q_2\,|$ donc $\frac{u_n}{q_2^n} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[1 - \left(\frac{q_1}{q_1}\right)^n\right] \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{5}}$ donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}$

$\boxed{\text{V2}}$ $|\,q_1\,| < |\,q_2\,|$ donc $|\,q_1\,|^n = o\left(|\,q_2^n\,|\right)$

et $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}q_2^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}q_1^n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}q_2^n + o(q_2^n) \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}q_2^n$

2. En déduire la limite de $\left(\dfrac{F_{n+1}}{F_n}\right)_n$ $\dfrac{F_{n+1}}{F_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{5}}q_2^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}q_2^n} \underset{n\to+\infty}{\sim} q_2 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q_2$

et $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{F_{n+1}}{F_n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

---

exercice 4 Trouver un équivalent simple de

a. $n\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)-n$

b. $\ln\left(1-\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$

Proposition de corrigé :

a. $n\cos\left(\frac{1}{n}\right)-n = n\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)-1\right)$ et, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $n\cos\left(\frac{1}{n}\right)-n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\times\left(-\dfrac{\left(\frac{1}{n}\right)^2}{2}\right)=-\dfrac{1}{2n}$
$\boxed{n\cos\left(\frac{1}{n}\right)-n\sim-\frac{1}{2n}}$

b. $\ln\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ car, par composition de limites, $\sin\left(\frac{1}{n}\right)\to 0$.

$$\boxed{\ln\left(1-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)\underset{n\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{n}}$$

---

exercice 5 Classer par ordre de négligeabilité les expressions suivantes.
(on pourra utiliser le symbole $<<$)

a) $\dfrac{1}{2^n}$, $\dfrac{\ln^2 n}{n^2}$, $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\ln n}{n}$, $\dfrac{n}{3^n}$, $\dfrac{2^n}{n!}$

b) 3^n, n^2, $n\ln(n)$, $\sqrt{n}\ln(n)$, $\dfrac{n^2}{\ln n}$, $\dfrac{n!}{\ln n}$

Proposition de corrigé :

a) $\frac{2^n}{n!}<<\frac{n}{3^n}<<\frac{1}{2^n}<<\frac{\ln^2 n}{n^2}<<\frac{1}{n}<<\frac{\ln n}{n}$ et b) $\sqrt{n}\ln(n)<<n\ln(n)<<\frac{n^2}{\ln n}<<n^2<<3^n<<\frac{n!}{\ln n}$

---

exercice 6 On donne la formule de Stirling : $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$

Donner un équivalent simple de $\dfrac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

Proposition de corrigé :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} &= \frac{1}{4^n}\times\frac{(2n)!}{(n!)^2}\\
&\sim \frac{1}{4^n}\times\frac{\sqrt{2\pi\times 2n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^2}\\
&\sim \frac{1}{4^n}\times\frac{2\sqrt{\pi\times n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}{2\pi n\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}}\\
&\sim \frac{1}{4^n}\times\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\left(\frac{2n}{n}\right)^{2n}\\
&\sim \frac{1}{4^n}\times\frac{1}{\sqrt{\pi n}}2^{2n}\\
&\sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}
\end{aligned}$$

exercice 7 **une somme de Riemann**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$

1. Justifier que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}$$
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_n - 2\sqrt{n}$.
   Justifier que la suite v est décroissante
   et convergente.
4. En déduire un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Proposition de corrigé :

1. $\boxed{\text{V1}}$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}\sqrt{k+1} - \sqrt{k} &= \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{k+1-k}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}\end{aligned}$$
   Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$2\sqrt{k} \leqslant \sqrt{k} + \sqrt{k+1} \leqslant 2\sqrt{k+1}$$
   d'où, en passant à l'inverse
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leqslant \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{k}}}$$
   $\boxed{\text{v2}}$ Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons f la fonction racine carrée.
   f est dérivable sur $[k; k+1]$
   La dérivée $f' : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante
   donc $f'([k, k+1]) \subset \left[\frac{1}{2\sqrt{k+1}}; \frac{1}{2\sqrt{k}}\right]$ et l'inégalité des accroissements finis donne également l'encadrement.
2. En sommant terme à terme l'inégalité précédente, on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$
   Le membre de gauche est une somme téléscopique et vaut $\sqrt{n} - \sqrt{1}$.
   De plus, comme on somme des termes positifs, on a
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} = \frac{1}{2} u_n$$
   Ainsi, $\sqrt{n} - 1 \leqslant \frac{1}{2} u_n$ puis $2\sqrt{n} - 2 \leqslant u_n$ $(\star)$
   Comme $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème de comparaison donne
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - 2\sqrt{n+1} - u_n + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \\ &= \frac{2}{2\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &< 0\end{aligned}$$
   En effet, $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$ par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$

RQ : on peut aussi réutiliser l'inégalité de 1.

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ est décroissante}}$$

La relation $(\star)$ donne : $2\sqrt{n}-2 \leqslant u_n$ donc $-2 \leqslant v_n$

On a ainsi prouvé que (v_n) est minorée, et décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone.

$$\boxed{(v_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$$

4. $\boxed{\text{v1}}$ Comme $u_n = v_n + 2\sqrt{n}$, on déduit de ce qui précède que

$$u_n = 2\sqrt{n} + \ell + o(1)$$

Comme $\ell + o(1) = o(\sqrt{n})$, il vient $\boxed{u_n \sim 2\sqrt{n}}$

$\boxed{\text{v2}}$ *(sans petit « o »)*

Comme $u_n = v_n + 2\sqrt{n}$, on déduit de ce qui précède que

$$\frac{u_n}{2\sqrt{n}} = \frac{v_n}{2\sqrt{n}} + 1.$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{2\sqrt{n}} = 1$ puis $\boxed{u_n \sim 2\sqrt{n}}$

---

exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On pose $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

1. a. Justifier que, pour tout entier $k \geqslant 1$, on a :

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}$$

   b. En déduire que $H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}$

   c. Conclure en prouvant $H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, on pose :

$$a_n = H_{n-1} - \ln(n) \quad \text{et} \quad b_n = H_n - \ln(n)$$

   a. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, justifier que $\quad \frac{1}{m+1} \leqslant \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}$

   b. Justifier que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.

   c. En déduire l'existence d'une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

   a. Exprimer S_n à l'aide de H_n et H_{2n}.

   b. Justifier la convergence et donner la limite de la suite (S_n)

Proposition de corrigé :

1. a. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $t \mapsto \frac{1}{t}$ est continue sur $]0;+\infty[$, donc sur $[k;k+1]$ et intégrable sur cet intervalle. De plus, pour tout $t \in [k,k+1]$, on a

$$\begin{array}{ccc} k \leqslant & t & \leqslant k+1 \\ \frac{1}{k} \geqslant & \frac{1}{t} & \geqslant \frac{1}{k+1} \end{array}$$

par croissance de l'intégrale ($k \leqslant k+1$)

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}t$$
$$\frac{1}{k} \geqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{k+1}$$
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{k}}$$

b. En sommant membre à membre l'inégalité précédente, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
$$\sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$
$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} - 1 \leqslant [\ln(t)]_1^n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n}$$
$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad H_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant H_n - \frac{1}{n}}$$

c. De l'encadrement précédent, on déduit que $\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant H_n \leqslant \ln(n) + 1$

d'où $1 + \frac{1}{n \ln n} \leqslant \frac{H_n}{\ln n} \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n\ln n} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{\ln n} = 1$, le théorème d'encadrement parmet de conclure que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{H_n}{\ln(n)} = 1$, c'est à dire

$$\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$$

2. a. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. D'après 1)a. on a :

$$\frac{1}{m+1} \leqslant \int_m^{m+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{m}$$
$$\frac{1}{m+1} \leqslant [\ln(t)]_m^{m+1} \leqslant \frac{1}{m}$$
$$\frac{1}{m+1} \leqslant \ln\left(\frac{m+1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}$$

$\boxed{\text{d'où le résultat}}$

b. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

$b_n - a_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$a_{n+1} - a_n = (H_n - \ln(n+1)) - (H_{n-1} - \ln n)$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$

En effet, pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) < x$

Ainsi, <u>(a_n) est croissante</u>.

$b_{n+1} - b_n = (H_{n+1} - \ln(n+1)) - (H_n - \ln n)$
$b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0$
(on le prouverait en étudiant $x \mapsto \frac{1}{x+1} - \ln(1 + \frac{1}{x})$)

Comme $\left| \begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} b_n - a_n = 0 \\ (a_n) \text{ est croissante.} \\ (b_n) \text{ est décroissante.} \end{array} \right.$

$\boxed{\text{les suites } (a_n) \text{ et } (b_n) \text{ sont adjacentes}}$.

c. Comme (a_n) et (b_n) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite γ.
On peut donc écrire que $b_n \underset{n\to+\infty}{=} \gamma + o(1)$

> Il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que
> $$H_n = \ln(n) + \gamma + o(1).$$

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n = H_{2n} - H_n$.

   b. D'après 2)c., on peut donc écrire :
   $S_n = H_{2n} - H_n$
   $S_n = \ln(2n) + \gamma + o(1) - (\ln(n) + \gamma + o(1))$
   $S_n = \ln\left(\frac{2n}{n}\right) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \ln(2)}$$

On aurait également pu trouver cette limite avec une limite de sommes de Riemann

---

exercice 9 *Cas d'une suite implicite.*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que l'équation
$$x^4 + x^3 - n = 0$$
admet une unique solution x dans R_+
Dans la suite, on note u_n cette unique solution.

2. a. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
   b. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne peut pas converger vers une limite finie.
   En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

3. a. Prouver que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n + 1$.
   b. En déduire l'équivalent $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4}}$.

__Proposition de corrigé__ :

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$f_n : x \mapsto x^4 + x^3 - n = 0$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}+$ comme somme de fonctions strictement croissantes et continues sur $\mathbb{R}+$.

D'après le théorème de la bijection monotone,
la fonction réalise donc une bijection de $\mathbb{R}+$ sur $[f_n(0); \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)] = [-n; +\infty[$
Comme $0 \in [-n; +\infty[$, $\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } u_n \text{ dans } \mathbb{R}+.}$

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(u_n) = 0$ donc
$$\begin{aligned} f_{n+1}(u_n) &= u_n^4 + u_n^3 - (n+1) \\ f_{n+1}(u_n) &= \underbrace{u_n^4 + u_n^3 - n}_{f_n(u_n)=0} - 1 \\ f_{n+1}(u_n) &= -1 \\ f_{n+1}(u_n) &< 0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \end{aligned}$$
Ainsi, $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et, par stricte croissance de f_{n+1}, on trouve $u_n < u_{n+1}$.

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a prouvé la $\boxed{\text{croissance de la suite } (u_n)}$.

b. Par l'absurde. Supposons que (u_n) converge vers une limite ℓ.
Alors, par continuité de $x \mapsto x^4 + x^3$, on a :
$$u_n^4 + u_n^3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell^4 + \ell^3.$$
Or, pour tout $n > 0$, $u_n^4 + u_n^3 = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$
contradiction. $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ n'est donc pas convergente}}$.

On sait de plus que (u_n) est croissante. Si elle ne divergeait pas vers $+\infty$, elle serait majorée et croissante donc convergente, ce qui n'est pas possible.
Donc
$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty}\qquad.$$

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \neq 0$ et $\dfrac{u_n + 1}{u_n} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \longrightarrow 1$ car $u_n \longrightarrow +\infty$
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n + 1}$$

b. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n^4 + u_n^3 = n$
$u_n^4 + u_n^3 = u_n^3(1 + u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} u_n^4$ par produit d'équivalents.

On en déduit $u_n^4 \underset{n\to+\infty}{\sim} n$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n^4}{n} = 1$

Par continuité en 1 de $x \mapsto x^{\frac{1}{4}}$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n^{1/4}} = 1$ et
$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{\frac{1}{4}}.}$$
on pouvait aussi utiliser de manière plus directe $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n \Rightarrow u_n^\alpha \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n^\alpha$ mais parfois les arguments "simples"...

exercice 10 ($\star$) Déterminer un équivalent simple quand n tend vers ∞ de la suite de terme général

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} k\ln(n^2+k^2) - n^2\ln n$$

Proposition de corrigé : *(d'après QSP HEC)*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Notons $S_n = \sum_{k=1}^{n} k\ln(n^2+k^2)$.

Si on étudie directement cette somme,
on tiendra le raisonnement suivant :
Par croissance sur $]0;+\infty[$ de $\ln$ et $x \mapsto x^2$,

$$\forall k \in [\![1;n]\!],\, k\ln(n^2) \leqslant k\ln(n^2+k^2) \leqslant k\ln(2n^2)$$

d'où, en sommant terme à terme entre 1 et n,

$$\sum_{k=1}^{n} k\ln(n^2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\ln(n^2+k^2) \leqslant \sum_{k=1}^{n} k\ln(2n^2)$$

Il vient alors :

$$n(n+1)\ln(n) \leqslant S_n \leqslant \frac{n(n+1)}{2}\left(\ln(2)+2\ln(n)\right)$$

puis

$$1+\frac{1}{n} \leqslant \frac{S_n}{n^2\ln(n)} \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{\ln(2)}{\ln(n)}+1\right)$$

Les membres de gauche et de droite ayant pour
limite 1, d'après le théorème des gendarmes,
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n^2\ln(n)} = 1$ donc $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2\ln(n)$
Ce résultat ne manque pas de donner du piquant à
l'exercice mais ne suffit pas à conclure. Il va falloir
procéder par égalités, et comme la somme a une tête de somme de Riemann... allons -y !

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} k\left[\ln(n^2)+\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\right] \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\times 2\ln(n) + n^2 \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}_{\text{the somme of the Riemann}} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto x\ln(1+x^2)$ est continue sur $[0,1]$ donc la suite des sommes de Riemann converge vers

$$\begin{aligned} \int_0^1 x\ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\Big[(1+x^2)\ln(1+x^2)-(1+x^2)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\left[2\ln(2)-2+1\right] \\ &= \ln(2)-\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(*reconnaitre la forme* $u'\ln(u)$ *qui s'intègre en* $u\ln(|u|)-u$)

Alors, $S_n = n^2\ln(n) + n\ln(n) + n^2(\ln(2)-\frac{1}{2}+o(1))$

Finalement, $S_n - n^2\ln(n) = n\ln(n) + (\ln 2 - \frac{1}{2})n^2 + o(n^2)$

Comme $n\ln(n) = o(n^2)$, on a

$$\boxed{S_n - n^2\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} (\ln 2 - \tfrac{1}{2})n^2}$$

exercice 11 Ranger par ordre de négligeabilité au voisinage de $+\infty$ les fonctions suivantes : (on pourra utiliser le symbole $<<$)

$f_1 : x \mapsto x^2$ $f_2 : x \mapsto \mathrm{e}^x$ $f_3 : x \mapsto 5^x$ $f_4 : x \mapsto \ln(x)$ $f_5 : x \mapsto x^5$ $f_6 : x \mapsto (\ln x)^5$ $f_7 : x \mapsto x\ln(x)$ $f_8 : x \mapsto x\sqrt{x}$ $f_9 : x \mapsto \frac{x}{\mathrm{e}^x}$

Proposition de corrigé Au voisinage de $+\infty$, on a :

$$f_9 << f_4 << f_6 << f_7 << f_8 << f_1 << f_5 << f_2 << f_3$$

exercice 12

Donner un équivalent simple des fonctions ci-dessous au voisinage de x_0.

1. $f(x) = \sin(x^2)\cos(x^3)\ln(1+2x) \quad x_0 = 0$
2. $f(x) = \left(\mathrm{e}^x - \cos\frac{1}{x}\right) \quad x_0 = +\infty$
3. $f(x) = \ln(x^2 + \mathrm{e}^{x^2}) \quad x_0 = +\infty$
4. $f(x) = \ln(x) + \cos(x) \quad x_0 = +\infty$
5. $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \quad x_0 = +\infty$

Proposition de corrigé (non rédigé)

1. $f(x) \underset{0}{\sim} x \times 1 \times 2x \underset{0}{\sim} 2x^2$
2. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \mathrm{e}^x$
3. $f(x) = x^2 + \ln(1 + x^2\mathrm{e}^{-x^2}) \underset{+\infty}{\sim} x^2$
4. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln(x)$
5. $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x^2 \times \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{+\infty}{\sim} x^{\frac{3}{2}}$

exercice 13 avec ou sans équivalents...

1. Déterminer les limites en 0^+, 0^- et $+\infty$ de $g : x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} - 1}{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} + 1}$
2. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Proposition de corrigé :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

   donc, par composition de limites, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 0$ et,

   par quotient de limites, $\displaystyle\lim_{x\to0^-} g(x) = \frac{0-1}{0+1} = -1$

   $\forall x \neq 0, g(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}}$ et $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \frac{-1}{x} = -\infty$

   donc $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}} = 0$ et,

   par quotient de limites, $\displaystyle\lim_{x\to0^+} g(x) = \frac{1-0}{1+0} = 1$
2. $\forall x \neq 0, \left|\sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \underset{x\to+\infty}{0}$

   car $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

exercice 14 Soit x_0 un réel et f une fonction définie sur un voisinage V de x_0.
On suppose que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 1$.

1. Montrer que $\ln(f(x)) \underset{x\to x_0}{\sim} f(x) - 1$

2. Déterminer un équivalent de $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ au voisinage de 0.

Proposition de corrigé :

Par hypothèse, $\forall x \in V,\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x) - 1 = 0$

Ainsi, $\ln(f(x)) = \ln(1 + [f(x) - 1]) \underset{x_0}{\sim} f(x) - 1$

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+x}{1-x} = 1$, le résultat précédent donne :

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} 1 - \frac{1+x}{1-x}$$

d'où

$$\boxed{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2x}{x-1}}$$

exercice 15 Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 2$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2^n}\right)^2}}}$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$

2. Déterminer la limite de la suite (u_n).

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $|\pi - u_n| \leqslant \dfrac{\pi^3}{6 \times 4^n}$

4. Écrire un programme `Python` qui déterminer utilise la suite (u_n) pour calculer une valeur approchée de π à 10^{-9} près.

Proposition de corrigé :

1. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$:« $u_n = 2^n \sin(\frac{\pi}{2^n})$ »

   $\boxed{\text{I}}$ Pour $n = 1$, on a $2^1 \sin(\frac{\pi}{2^1}) = 2 = u_1$ donc $\mathcal{H}_1$ est vraie.

   $\boxed{\text{H}}$ Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{\sqrt{2}u_n}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \left(\frac{u_n}{2^n}\right)^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2}}} \\
&= \frac{\sqrt{2} \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2}}}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}{\sqrt{1+\cos\left(2\times\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}} \text{ car } \frac{\pi}{2^n}\in[0;\frac{\pi}{2}] \text{ et donc } \cos\frac{\pi}{2^n}\geqslant 0$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times 2^n \sin\left(2\times\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sqrt{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)-1}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\times 2^n 2\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sqrt{2\cos^2\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}}$$

$$= 2^{n+1}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \text{ car } \cos\frac{\pi}{2^{n+1}}\geqslant 0$$

Donc$\mathcal{H}_{n+1}$ est vraie.

ne pas rater l'argument du cos positif car $\sqrt{x^2}$ peut valoir x ou $-x$

$\boxed{\text{C}}$ D'après le principe de récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{H}_n$ est vraie.

2. $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{2^n}=0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\underset{+\infty}{\sim}=\frac{\pi}{2^n}$
   et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2^n\times\frac{\pi}{2^n}=\pi$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty}u_n=\pi}$.

3. *L'inégalité à prouver est équivalente à*

$$\left|\frac{\pi}{2^n}-\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right|\leqslant\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^2\times\frac{\pi}{3}$$

   Soit $f: x\mapsto\sin(x)$. f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
   On a : $\begin{cases}\forall x\in\mathbb{R}, & f'(x)=\cos(x)\\ \forall x\in\mathbb{R}, & f''(x)=-\sin(x) \text{ et } |f''(x)|\leqslant 1\end{cases}$
   Soit $x>0$. L'inégalité de Taylor Lagrange sur $[0;x]$ donne :

$$\left|f(x)-\left(f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2}f''(0)\right)\right|\leqslant\frac{x^3}{3!}\times 1$$

$$|\sin(x)-x|\leqslant\frac{x^3}{3!}\times 1 \quad (\text{car } \sin(0)=0)$$

   Avec $x=\frac{\pi}{2^n}$, on trouve :

$$\left|\sin(\frac{\pi}{2^n})-\frac{\pi}{2^n}\right|\leqslant\frac{\left(\frac{\pi}{2^n}\right)^3}{3!}$$

   En multipliant par 2^n, on obtient alors :

$$\left|2^n\sin(\frac{\pi}{2^n})-\pi\right|\leqslant\frac{\pi^3}{6\times(2^n)^2}$$

$$\boxed{|u_n-\pi|\leqslant\frac{\pi^3}{6\times(2^n)^2}}$$

   NB : cela prouve aussi que la suite converge vers π

4. Voici un code qui fonctionne :

```
import numpy as np
u = 2
n = 1
while (np.pi**3)/(6*4**n)>10**(-9) :
    u = np.sqrt(2)*u/np.sqrt(1+np.sqrt(1-(u/(2**n))**2))
    n += 1
print(u)
```

Deux remarques :

- *en fait l'approximation obtenue diffère de π de $4,885.10^{-15}$. Attention à ne pas confondre l'écart réel et la majoration de l'écart donnée par la formule de Taylor.*
- *en toute rigueur, si on cherche une approximation de π, on ne devrait pas utiliser `%pi` dans le programme. Pour les puristes 3,15 (ou toute autre valeur approchée par excès) conviendrait.*

exercice 16

1. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow]0; +\infty[$ deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

   a. On suppose que $f \underset{x_0}{\sim} g$. A-t-on $\quad \ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$.

   b. Trouver une condition suffisante pour avoir l'équivalence.

2. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

   a. On suppose que $f \underset{x_0}{\sim} g$. A-t-on $\quad \mathrm{e}^f \underset{x_0}{\sim} \mathrm{e}^g$.

   b. Trouver une condition suffisante pour avoir l'équivalence.

Indication : Le « problème » vient d'une forme indéterminée

Proposition de corrigé :

1. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow]0; +\infty[$ deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

   a. On a vu que $\ln f$ et $\ln g$ ne sont *a priori* pas équivalentes. Par exemple, avec $f : x \mapsto 1 + x^4$ et $g : x \mapsto 1 + x^2$, on a bien $f \underset{0}{\sim} g$ mais $\frac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} \underset{0}{\sim} \frac{x^2}{x} = x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \neq 1$
   on a choisi x^4 et x^2 pour que les fonctions soient bien définies sur $\mathbb{R}$. On pouvait aussi choisir $f : x \mapsto 1$.

   b. Le « problème » vient de la forme indéterminée, qui peut être de la forme $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ (on ne devrait jamais écrire ceci dans une copie !)

   Supposons que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$
   Alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel $g(x) \neq 1$
   on peut donc calculer
   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(f(x))}{\ln(g(x))} = \dfrac{\ln(\ell)}{\ln(\ell)} = 1$ donc $\ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g$.

   On a bien

   $$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \ell \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\quad \Longrightarrow \quad \ln f \underset{x_0}{\sim} \ln g}$$

2. Soit $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

   a. On a vu que e^f et e^g ne sont *a priori* pas équivalentes. Par exemple, avec $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto x - 1$, on a bien $f \underset{+\infty}{\sim} g$ mais $\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}} = \mathrm{e}^1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e} \neq 1$
   l'exponentielle « amplifie » tellement en $+\infty$ (et en $-\infty$ que le moindre écart se ressent.

   b. Un critère analogue au précédent $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \in \mathbb{R}\right)$ conviendrait
   Nous allons utiliser un critère moins strict encore.

   Supposons f bornée au voisinage de x_0.
   Alors $\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}} = \mathrm{e}^{f(x)-g(x)}$.
   Comme $f \underset{x_0}{\sim} g$, pour tout x dans un voisinage de x_0, $f(x) - g(x) = o_{x_0}(f(x))$
   Ainsi, $\frac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}} = \mathrm{e}^{o_{x_0}(f(x))}$

   Comme f est bornée, $\lim\limits_{x\to x_0} o_{x_0}(f(x)) = 0$ et, par continuité de la fonction exponentielle en 0, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{\mathrm{e}^{f(x)}}{\mathrm{e}^{g(x)}} = 1$
   Remarque : si $\lim\limits_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$, f est bornée au voisinage de x_0.

   On a bien

$$f \text{ bornée au voisinage de } x_0 \quad \text{et } f \underset{x_0}{\sim} g \quad \Longrightarrow \quad e^f \underset{x_0}{\sim} e^g$$

pour aller plus loin...

exercice 17 **oral ESCP 2017 - S - 1.09**

On admet la propriété $\mathscr{C}$ suivante :
Pour toute suite réelle $(a_n)_{n\geq 1}$*, on a :*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}[a_1 + \cdots + a_n] = \ell$$

Autrement dit, si une suite converge vers une limite ℓ*, alors la suite de ses moyennes converge aussi vers* ℓ*.*

1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_1 = 2$, $u_2 = 1$ et la relation de récurrence :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq 2, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}}$$

   a. Vérifier que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est correctement définie.

   b. Etudier les variations de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

   c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

   d. Prouver que la suite $n \mapsto \dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2}$ converge vers 2.
   En déduire un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers l'infini.

2. Dans cette question, on considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = 1$ si n est pair et $u_n = 0$ si n est impair.

   a. Étudier la convergence de la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ définie par :

$$\forall\, n \geq 1, v_n = \frac{1}{n}[u_1 + \cdots + u_n]$$

   b. Que pensez-vous de la réciproque de la propriété $\mathscr{C}$?

3. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ et on pose $w_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \geq 1$.

   a. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ par : $\forall\, n \geq 1, v_n = \dfrac{1}{n}[u_1 + \cdots + u_n]$.
   Soit $n \geq 2$. Prouver l'égalité : $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} k w_k$.

   b. On suppose que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ converge et on note ℓ sa limite.
   On suppose également que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n w_n = 0$.
   Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge alors vers ℓ.

Proposition de corrigé :

1. a) Une récurrence immédiate montre que $u_n > 0$ pour tout entier n, la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est donc correctement définie.
b) (u_n) est strictement positive. De plus plus tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}} < 1 \text{ car } u_n > 0$$
Donc (u_n) est décroissante.
c) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge (d'après le théorème de la limite monotone) une limite $\ell \geqslant 0$.
Par continuité de la fonction définissant la récurrence, ℓ est solution de l'équation :
$$\ell = \frac{\ell}{1+\ell^2} \iff \ell(1+\ell^2) = \ell \iff \ell^3 = 0 \iff \ell = 0$$
Ainsi $\ell = 0$.
d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant la relation de récurrence définissant u_n, il vient :
$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \sqrt{u_n u_{n-1}}.$$
En élevant au carré :
$$\frac{1}{u_{n+1}^2} = \frac{1}{u_n^2} + u_n u_{n-1} + 2\sqrt{\frac{u_{n-1}}{u_n}}.$$
On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n\sqrt{u_n u_{n-1}}} \longrightarrow 1$ car $u_n \to 0$ et donc $u_n u_{n-1} \to 0$.
Par somme de limites, on obtient donc :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = 2$$
Avec la propriété $\mathcal{C}$ appliquée à la suite $(a_n) = \left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}\right)$, on obtient :
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{u_{k+1}^2} - \frac{1}{u_k^2}\right) = 2$$
Or, on reconnaît une somme téléscopique et on trouve :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{4}\right) = 2$$
d'où
$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{nu_{n+1}^2} - \frac{1}{4n}\right) = 2$$
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = 0$, on trouve
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{nu_{n+1}^2} = 2$$
et on en déduit que :
$$u_n \underset{(\infty)}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

2. a) On a $v_{2n} = \dfrac{1}{2}$ et $v_{2n+1} = \dfrac{n}{2n+1}$. On voit donc que la suite (v_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.
b) Comme la suite (u_n) est clairement divergente et que la suite (v_n) converge vers $1/2$, la réciproque de la propriété $\mathcal{C}$ est fausse en général.

3. a) On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} kw_k \sum_{k=1}^{n-1} k(u_{k+1}-u_k) = \sum_{\ell=1}^{n}(\ell-1)u_\ell - \sum_{k=1}^{n-1} ku_k = (n-1)u_n - \sum_{\ell=1}^{n-1} u_\ell = nu_n - \sum_{k=1}^{n} u_k. = n(u_n - v_n)$
d'où
$$u_n - v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kw_k$$
b) Il suffit d'utiliser l'égalité précédente et d'appliquer la propriété $\mathcal{C}$ à la suite $(a_n) = (nw_n)$.
Puisque $\lim\limits_{n\to\infty} nw_n = 0$, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} kw_k = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
On a donc obtenu une réciproque partielle de la propriété $\mathcal{C}$.