dérivée afin d'en déduire les variations de la fonction et présenter celles-ci (ou pas) dans un tableau de variation.

- ☐ *savoir justifier la présence d'un extrémum local à l'aide de la dérivée.*
- ☐ *déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction*
- ☐ *utiliser les informations présentes dans le tableau de variation pour tracer l'allure de la courbe d'une fonction.*
- ☐ *connaître et utiliser les théorèmes de Rolle et des accroissements finis avec une <u>rédaction précise</u>.*
- ☐ *déterminer l'expression de la dérivée de la bijection réciproque d'une fonction.*
- ☐ *dérivée de* $\tan$ *et* $\arctan$

19 Dérivation

Dérivabilité en un point

Dans ce chapitre, f désigne une fonction d'une variable réelle, définie sur un ensemble D_f et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan.

Dérivabilité à gauche et à droite

Définition 1 ***(Dérivée à droite ou à gauche en un point)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in D_f \\ f \text{ une fonction définie au voisinage de } x_0. \end{array} \right.$

On dit que f est <u>dérivable à droite</u> (respectivement <u>dérivable à gauche</u>) en x_0 lorsque

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \left(\text{resp. } \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

existe et est finie. On note alors cette limite $f'_d(x_0)$ (resp. $f'_g(x_0)$).

Propriété 1 ***(Demi-tangente à la courbe)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in D_f \\ f \text{ une fonction définie au voisinage de } x_0. \end{array} \right.$

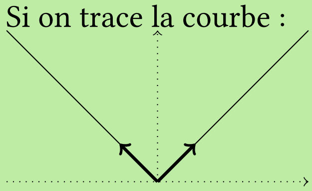
Si f est dérivable à droite (resp. à gauche) en x_0, alors $\mathcal{C}_f$ admet une <u>demi-tangente</u> à droite (resp. à gauche) d'équation :

$$\begin{cases} y = f(x_0) + f'_d(x_0)(x - x_0) \\ x \geqslant x_0 \end{cases} \qquad \left(\text{resp. } \begin{cases} y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x - x_0) \\ x \leqslant x_0 \end{cases} , \right)$$

<u>Exemple</u> n° 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \mapsto |x|$.

- Elle est dérivable à droite en 0, et $f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$.
- Elle est dérivable à gauche en 0, et $f'_g(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$.

Si on trace la courbe :



Définition 2 ***(Fonction dérivable en un point, nombre dérivé)***

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in D_f \\ f \text{ une fonction définie au voisinage de } x_0. \end{array} \right.$

On dit que f est <u>dérivable</u> en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée <u>nombre dérivé</u> de f en x_0.

Cette définition équivaut à dire que f est dérivable en x_0 si et seulement si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}.$$

On rencontrera en mathématiques appliquées (économie, physique, ...) rencontrer la notations alternatives suivantes :

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\text{petit écart des images}}{\text{petit écart en } x}$$

Propriété 2

Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in D_f \\ f \text{ une fonction définie au voisinage de } x_0. \end{array} \right.$

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0) = \ell$

(ii) f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

Preuve : D'après le chapitre sur les limites de fonction, le taux d'accroissement de f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en x_0 si et seulement si il admet des limites à droite et à gauche égales à ℓ en x_0. D'où le résultat. □

Si les dérivées à gauche et à droite sont différentes, les tangentes à droite et à gauche ne sont pas « dans le prolongement » l'une de l'autre et forment un angle, et réciproquement.

Conséquence, si la courbe représentative d'une fonction présente un « angle », elle ne sera pas dérivable en l'abcisse du point anguleux.

tentant mais faux...
Si $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f'(x)$, on ne peut rien conclure. f peut ne pas être dérivable.
Si f est de plus continue en x_0 alors cela fonctionnerait, mais il s'agit d'un résultat hors programme. Si vous souhaitez l'utiliser, il faudra d'abord apprendre à le démontrer...

Propriété 3 ***(Tangente à la courbe)***

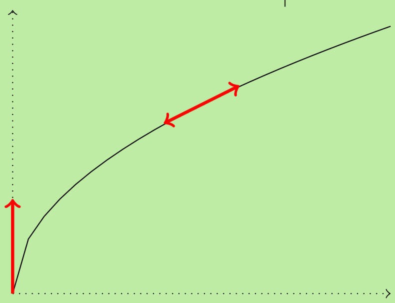
Soit $\left| \begin{array}{l} x_0 \in D_f \\ f \text{ une fonction définie au voisinage de } x_0. \end{array} \right.$

Si f est dérivable en x_0, alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ une tangente Δ d'équation :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en x_0
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple n° 2 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $x \mapsto \sqrt{x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et admet donc les tangentes :



Dérivabilité et continuité

Propriété 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est dérivable en un point x_0 et $f'(x_0) = \ell$

(ii) il existe $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et telle que,
pour tout $x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Preuve :
(D.A.C)

$(ii) \Rightarrow (i)$ Supposons l'existence de $\varepsilon : I \to \mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et telle que,

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f(x) = f(x_0) + \ell(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

Alors, pour tout $x \neq x_0$, on a :
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell + \varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0)$ car, par hypothèse, $\varepsilon(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} 0$,
f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Réciproquement, supposons f dérivable en x_0. On définit alors

$$\begin{array}{rccl} \varepsilon : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) & \text{si } x \neq x_0 \\ 0 & \text{si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

Comme f est dérivable en x_0, $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$ donc $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$.

De plus, pour tout $x \neq x_0$,

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\left(\tfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right) = f(x)$$

La formule est également vraie pour $x = x_0$, d'où le résultat. □

L'écriture

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

s'appelle <u>développement limité à l'ordre 1 de f en x_0</u>, notion que l'on approfondira au deuxième semestre.

$(x-x_0)\varepsilon(x)$ mesure l'<u>erreur</u> commise en approchant $f(x)$ par la fonction affine dont la courbe est tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0.

Propriété 5

Toute fonction f dérivable en un point x_0 est continue en x_0.

Preuve : Si f est dérivable en x_0 alors il existe $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$ et telle que

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+(x-x_0)\varepsilon(x).$$

Or, $\lim\limits_{x\to x_0} (x-x_0) = 0$ donc, par somme et produit de limites, on a bien $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ et f est continue en x_0. □

Attention : La réciproque est FAUSSE, la continuité n'implique pas la dérivabilité.

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto |\,x\,|$, est continue, mais pas dérivable en 0.

Opérations sur les fonctions dérivables

Propriété 6

Soient $\left|\begin{array}{l} u \text{ et } v \text{ deux fonctions dérivables en un point } x_0 \\ \lambda \text{ un réel.} \end{array}\right.$

Alors la fonction $\lambda u + v$ est dérivable en x_0, et

$$(\lambda u+v)'(x_0) = \lambda u'(x_0)+v'(x_0).$$

On dit que la dérivation est <u>linéaire</u>.

Preuve : On se place au voisinage de x_0. Pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{(\lambda u+v)(x)-(\lambda u+v)(x_0)}{x-x_0} = \frac{(\lambda u(x)+v(x))-(\lambda u(x_0)+v(x_0))}{x-x_0} = \lambda\frac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0}+\frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0}.$$

Or u et v sont dérivables en x_0, donc les deux termes de droite admettent une limite finie en x_0. Donc $\lambda u + v$ est dérivable en x_0 et on obtient par passage à la limite :

$$(\lambda u+v)'(x_0) = \lambda u'(x_0)+v'(x_0).$$

Propriété 7

Soient u et v deux fonctions dérivables en un point x_0.
Alors la fonction uv est dérivable en x_0, et

$$(uv)'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0).$$

Si de plus, la fonction v ne s'annule pas au voisinage de x_0,
alors la fonction $\frac{u}{v}$ est dérivable en x_0, et

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v(x_0)^2}.$$

Preuve : On se place au voisinage de x_0. Pour tout $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned}\frac{(uv)(x) - (uv)(x_0)}{x - x_0} &= \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} \\ &= u(x)\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0} + v(x_0)\frac{u(x) - u(x_0)}{x - x_0},\end{aligned}$$

or u et v sont dérivables en x_0 et u est continue (car dérivable) en x_0, donc le membre de droite admet une limite par produit et somme de limites.
Donc uv est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$(uv)'(x_0) = u(x_0)v'(x_0) + v(x_0)u'(x_0).$$

De plus, pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{\frac{1}{v}(x) - \frac{1}{v}(x_0)}{x - x_0} = -\frac{1}{v(x)v(x_0)}\frac{v(x) - v(x_0)}{x - x_0}.$$

Comme v est dérivable et continue en x_0, le membre de droite admet bien une limite.
Donc $\frac{1}{v}$ est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{1}{v(x_0)^2}v'(x_0).$$

Le résultat sur le quotient découle ensuite directement de ceux sur le produit et l'inverse. □

Propriété 8

Soient f une fonction dérivable en un point x_0 et g une fonction dérivable en $f(x_0)$.
Alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0, et

$$(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \cdot (g' \circ f)(x_0).$$

Preuve : On se place au voisinage de x_0. Pour tout $x \neq x_0$, on aimerait écrire :

$$\frac{g \circ f(x) - g \circ f(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

pour faire apparaître les taux d'accroissement de f et g. Mais rien ne garantit la non-annulation de $f(x) - f(x_0)$. On va donc utiliser une fonction auxiliaire pour contourner ce problème. Soit ϕ la fonction définie au voisinage de $f(x_0)$ par :

$$\phi(y) = \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} \text{ si } y \neq f(x_0) \quad \text{et} \quad \phi(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

Par définition de $g'(f(x_0))$, ϕ est continue au point $f(x_0)$. Et pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\phi(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Comme f est dérivable en x_0 et ϕ continue en $f(x_0)$, le membre de droite admet bien une limite en x_0. Donc $g\circ f$ est dérivable en x_0 et par passage à la limite :

$$(g\circ f)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g\circ f(x)-g\circ f(x_0)}{x-x_0}=\phi(f(x_0))f'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0).$$

□

Dérivabilité sur un intervalle

DÉFINITION

Définition 3 ***(Dérivée sur un intervalle, fonction dérivée)***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide non réduit à un point
f une fonction définie sur I.

On dit que la fonction f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I (sauf pour les bornes de I, pour lesquelles on se restreint à la dérivabilité à droite ou à gauche).
On définit alors la fonction dérivée de f notée f', définie sur I par

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

ATTENTION : Une fonction peut être dérivable sur $[a, b]$ et sur $[b, c]$ sans être dérivable sur $[a, c]$. L'étude **locale** de la dérivabilité en b est indispensable pour affirmer qu'elle est dérivable sur $[a, c]$.

Exemple n° 3 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \geqslant 0, f(x) = x^2 \text{ et } \forall x < 0, f(x) = 0.$$

f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

Il est immédiat que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, car elle coïncide sur ces intervalles avec des fonctions polynômes. Mais il faut étudier le raccord en 0 avant de conclure à la dérivabilité sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x < 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0, \qquad \forall x > 0, \quad \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x^2}{x} = x.$$

Donc f est dérivable à droite et à gauche en 0, et $f'_d(0) = 0 = f'_g(0)$. Donc f est dérivable en 0 et f est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Les propriétés **6** et **7** se traduisent ainsi : Pour tout réel λ et toutes fonctions u et v définies et dérivables sur des domaines compatibles avec les opérations ci-dessous, on a :

Linéarité de la dérivation : $(\lambda u + v)' = \lambda u' + v'$

produit : $(uv)' = u'v + uv'$

quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

FORMULAIRE

Les dérivées classiques suivantes sont à connaître :

D_f désigne le domaine de définition de f et $D_{f'}$ le domaine de dérivabilité de f.

$\forall x \in D_f, f(x) =$	D_f	$D_{f'}$	$\forall x \in D_{f'}, f'(x) =$
e^x	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	e^x
$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{x}$
k (constante)	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	0
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$x^n, n \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$\dfrac{-1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$	$1 + (\tan x)^2$
$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
a^x $(a \in \mathbb{R}_+^*)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a^x \ln a$

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I, on obtient par composition (en précisant les conditions de validité) les formules suivantes, classiques également :

fonction du type	**dérivée**
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\dfrac{u'}{u} = u' \times \frac{1}{u}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} = u' \times \alpha u^{\alpha-1}$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \sin u = u' \times (-\sin(u))$

Remarque : le « type » u^α comprend $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$...

Plus généralement, si f et u sont des fonctions dérivables avec des domaines de définition compatibles, alors :

$$(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$$

Propriété 9 ***(Dérivée d'une fonction polynomiale)***

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in[\![0,n]\!]} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$.

Propriété 10 ***(Dérivée de la fonction réciproque)***

Soit | I un intervalle
| $f : I \to f(I)$ une fonction dérivable et strictement monotone
| $a \in I$.

La fonction réciproque f^{-1} est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si $f'(a) \neq 0$.

On a alors, en tout b où f^{-1} est dérivable,

$$\left[f^{-1}\right]'(b) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(b)}.$$

Preuve : La fonction f est continue sur I (car dérivable) et strictement croissante sur cet intervalle. D'après le théorème de la bijection, elle réalise donc bien une bijection de I sur $J = f(I)$ et f^{-1} existe et est continue (et strictement monotone) sur J.

Soit $b \in J$ et a son unique antécédent par f. On a $b = f(a)$, donc $a = f^{-1}(b)$.
Pour tout $y \in J \setminus \{b\}$, $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \dfrac{f^{-1}(y) - a}{f(f^{-1}(y)) - f(a)}$.

Or f^{-1} est continue sur J, donc en b. Donc $\lim_{y\to b} f^{-1}(y) = f^{-1}(b) = a$.
Par continuité de f sur I, composition de limites et dérivabilité de f en a, on trouve alors :

$$\lim_{y\to b} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

• Si $f'(a) = 0$, par passage à l'inverse $\dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$ n'admet pas de limite finie en b, donc f^{-1} n'est pas dérivable en b.

• Si $f'(a) \neq 0$, la limite de l'inverse est finie donc f^{-1} est dérivable en b et on trouve :

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y\to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Praticopratiqu

Pour retrouver simplement la formule, sachant que, pour tout $x \in D_{f'}$, on a :

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

En dérivant membre à membre, avec la formule $(u \circ v)' = v' \cdot u' \circ v$, on trouve :

$$\left[f^{-1}\right]'(x) \times f' \circ f^{-1}(x) = 1$$

d'où la formule !

Exemple n° 4 Trouver les dérivées et leurs ensembles de définition pour les fonctions :

- f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_1(x) = \cos(3x) + 2\sin(x)$.

  f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et,
  pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f_1'(x) = -3\sin(3x) + 2\cos(x)$.

- f_2 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_2(x) = 2\sqrt{x^3}$.

  f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables et,
  pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_2'(x) = 2\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3}} = \dfrac{3x^2}{\sqrt{x^3}} = 3\sqrt{x}$ car $x \geqslant 0$.

  On peut aussi écrire $f_2(x) = 2x^{\frac{3}{2}}$ et $f_2'(x) = 2 \times \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$ qui donne le même résultat.

- f_3 définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f_3(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

  f_3 est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas et,
  pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ $f_3'(x) = \dfrac{2x(x-2) - (x^2+1)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$.

Définition 4 ***(Fonction de classe $\mathcal{C}^1$)***

Soit I un intervalle et f une fonction définie sur I.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque f est dérivable sur I et que sa dérivée f' est continue sur I.

Exemple n°5 Les fonctions polynômes, la fonction exponentielle, les fonction cosinus et sinus sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Propriété 11 ***(Espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$)***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(I)$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

Preuve : On va montrer que c'est un **sous**-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$:

- La fonction nulle est dérivable sur I, et sa dérivée est la fonction nulle, continue sur I, donc la fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $\mathcal{C}^1(I)$ est non vide.
- Soit f et g deux fonctions de $\mathcal{C}^1(I)$, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Par les propositions précédente, $\lambda f + g$ est dérivable sur I, de dérivée $\lambda f' + g'$. Comme f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$, f' et g' sont continues sur I. Par combinaison linéaire de fonctions continues, $\lambda f' + g'$ est continue sur I. Donc $\lambda f + g \in \mathcal{C}^1(I)$.

Donc $\mathcal{C}^1(I)$ est un sous espace vectoriel de l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$,
c'est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. □

Caractérisation d'un extremum local

Propriété 12 ***(Caractérisation d'un extremum par la dérivée)***

Soit $\left| \begin{array}{l} f \text{ une fonction dérivable sur un intervalle } I \\ x_0 \in I \text{ qui n'est \underline{pas une borne} de } I. \end{array} \right.$

Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Preuve : Supposons que f possède un maximum local en x_0.

Comme x_0 n'est pas une borne, il existe alors un réel $\alpha > 0$ tel que $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha] \subset I$ et $\forall x \in [x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
Donc, pour tout $x \in]x_0, x_0 + \alpha]$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$.
Or f est dérivable en x_0 par hypothèse.
On peut donc passer à la limite dans cette inégalité et on trouve $f'(x_0) \leqslant 0$.
De même, pour tout $x \in [x_0 - \alpha, x_0[$, $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ ce qui donne $f'(x_0) \geqslant 0$.

Finalement, $f'(x_0) = 0$. □

un extremum
des extrema

Exemple n° 6 Trouver les extrema locaux de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^4 + x.$$

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = 4x^3 + 1.$$
Cette dérivée s'annule si et seulement si $x^3 = -\dfrac{1}{4}$.

Il y a une unique solution réelle, $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et la dérivée est négative avant et positive après.

Donc la fonction est décroissante avant $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$, et croissante ensuite. On en conclut que la fonction admet un minimum local en $-\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. Comme la dérivée ne s'annule pas ailleurs, et qu'il n'y a pas de borne ou de point où la fonction n'est pas dérivable, cela signifie que la fonction n'admet pas de maximum.

ATTENTION : la réciproque est fausse !
Il se peut que $f'(x_0) = 0$ sans que f n'admette d'extremum en x_0.

Par exemple, la fonction cube est strictement croissante et n'admet donc pas d'extremum local, mais sa dérivée s'annule en 0.

Il est souvent plus clair d'exploiter le **tableau de variation** d'une fonction, où les extrema locaux apparaissent naturellement. Toutefois, on peut avoir besoin de cette propriété dans des exercices plus théoriques.

Principaux théorèmes concernant les dérivées

Théorème de Rolle

Propriété 13 ***(Théorème de Rolle)***

Soit $a < b$. Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et qui vérifie $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

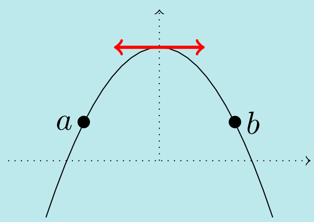
Preuve : **(D.A.C)**

La fonction f est continue sur le segment $[a, b]$ donc par le théorème des bornes elle y est bornée et atteint ses bornes. On note m le minimum global et M le maximum global.

- Si $m = M$, la fonction est constante sur $[a, b]$, et donc f' est nulle.
  Dans ce cas, on peut choisir n'importe quel c qui conviendra.
- Si $m \neq M$, l'une de ces valeurs au moins n'est atteinte ni en a ni en b (puisque $f(a) = f(b)$).
  Supposons qu'il s'agit de M (un raisonnement analogue se fait avec m).
  Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme la fonction admet un maximum en c, sa dérivée s'annule par le théorème précédent. D'où le résultat. □

Le réel c n'est pas nécessairement unique.

Interprétation graphique :
il existe donc un point de la courbe admettant une tangente parallèle à l'axe des abscisses.



Exemple n° 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto (x-1)(x-2)$.
Prouver que f' s'annule dans $]1; 2[$.

f est polynômiale donc continue sur $[1; 2]$ et dérivable sur $]1; 2[$.
De plus, $f(1) = f(2) = 0$ donc le théorème de Rolle assure l'existence de $c \in]1; 2[$ tel que $f'(c)$. d'où le résultat.

Bon, pas besoin du théorème de Rolle pour affirmer que, pour un trinôme, l'abscisse x_0 du sommet de la parabole se trouve entre les racines (au milieu en fait). Le cours de lycée précise même $x_0 = \frac{x_1+x_2}{2}$

Remarque : On peut voir le théorème de Rolle comme un cas particulier du TAF

Propriété 14 ***(Théorème des Accroissements Finis)*** ACCROISSEMENTS FINIS

Soit $a < b$. Si f est une fonction | continue sur $[a, b]$
| dérivable sur $]a, b[$

$$\text{alors il existe } c \in]a, b[\text{ tel que } f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Preuve : On se ramène aux hypothèses du théorème de Rolle. Pour tout $x \in [a, b]$, on pose :

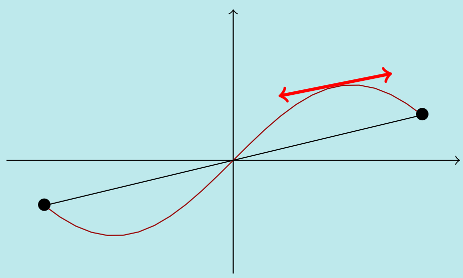
$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues, et elle est dérivable sur $]a, b[$ comme somme de fonctions dérivables.
Et pour tout $x \in]a, b[$, $\quad g'(x) = f'(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

On remarque que $g(b) = g(a) = f(a)$.
Donc g vérifie les hypothèses du théorème de Rolle, et il existe $c \in]a, b[$ tel que $g'(c) = 0$.
On a prouvé l'existence de $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. □

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la corde $[AB]$, donc il existe un point de $\mathcal{C}_f$ admettant une tangente parallèle à cette corde.

Ici encore, le réel c n'est pas unique *a priori*.



Propriété 15 ***(Inégalité des Accroissements Finis)***

Soit | I un intervalle de $\mathbb{R}$
| f une fonction dérivable sur I telle qu'il existe deux réels m et M qui vérifient :
| $\forall x \in I, m \leqslant f'(x) \leqslant M$.

Alors $\forall (a, b) \in I^2$ tels que $\boxed{a \leqslant b}$,

$$m(b - a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant M(b - a).$$

Remarque : on peut noter la troisième hypothèse $\forall x \in I, f'(x) \in [m; M]$

Preuve (D.A.C) Si $a = b$, le résultat est évident.
Sinon, l'égalité des accroissements finis appliquée à la fonction f sur $[a, b]$ donne l'existence d'un $c \in]a, b[$ tel que $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$.
L'encadrement de f' donne par ailleurs $m \leqslant f'(c) \leqslant M$ et donc

$$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M.$$

Il suffit alors de tout multiplier par $(b - a) \geqslant 0$ pour obtenir le résultat annoncé. □

Propriété 16 ***(Inégalité des Accroissements Finis, deuxième version)***

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$
f une fonction dérivable sur I telle qu'il existe un réel K qui vérifie :
$\forall x \in I, |\, f'(x)\,| \leqslant K$.

Alors $\forall (a,b) \in I^2$,

$$|\, f(b) - f(a)\,| \leqslant K\,|\,b-a\,|\,.$$

Preuve (D.A.C) Il suffit d'appliquer la première version de l'inégalité des accroissements finis entre $\min(a,b)$ et $\max(a,b)$ en posant $m = -K$ et $M = K$.
Variante : comme le résultat à prouver est inchangé en permutant a et b, on peut supposer sans perte de généralité que $a \leqslant b$ et appliquer l'IAF. $\square$

Remarques :

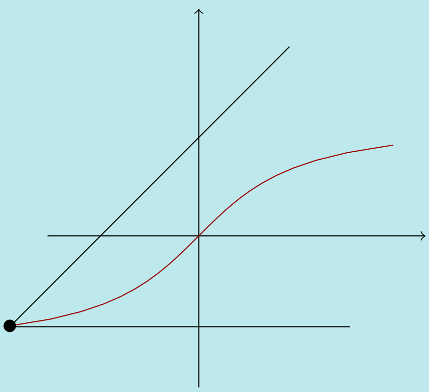
- On choisit parfois $I = [a,b]$. Il est cependant utile de retenir la formulation générale.
- Cette deuxième version de l'IAF, pour laquelle **l'ordre entre a et b** n'a pas d'importance est bien pratique pour les études de suite, pour obtenir des majorations type

$$|\,u_{n+1} - \ell\,| \leqslant k\,|\,u_n - \ell\,|$$

alors que la position de u_n par rapport à ℓ peut varier avec n.

Interprétation géométrique.

Ce résultat permet d'encadrer les valeurs de la fonctions entre deux droites passant par le point de coordonnées $(a, f(a))$:



Une autre manière de voir, depuis chaque point de la courbe, si on trace les droites de coefficients directeurs m et M, tout le reste de la courbe est dans le « cône ». Ce type de théorème permet de donner un encadrement des valeurs à venir dans des modèles (finance, ...), d'encadrer les effets d'une erreur de mesure...

Les hypothèses sur f des deux formes d'IAF sont plus simples que celles du TAF.
Apprenez la différence, et apprenez pourquoi c'est différent !
Attention aussi aux quantificateurs...

Exemple n° 8 Prouver que, pour tout $x > 0$, on a $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$

$\ln$ est dérivable sur $[x; x+1]$ et, pour tout $t \in [x; x+1]$, on a
$$\frac{1}{x+1} < \ln'(t) = \frac{1}{t} < \frac{1}{x}$$

L'inégalité des accroissements finis donne alors :
$$\frac{1}{x+1}(x+1-x) \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}(x+1-x)$$
d'où le résultat.

pour déduire un encadrement avec la fonction inverse, il faut s'assurer que l'on est **soit** *dans* $]0; +\infty[$, **soit** *dans* $]-\infty; 0[$, *d'où l'importance de préciser* $x > 0$ *!*

Exemple n° 9 Prouver que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$

Par imparité de sin, il suffit de vérifier pour $x \geqslant 0$. Soit $x \geqslant 0$, sin est dérivable sur $[0; x]$ et, pour tout $t \in [0; x]$, $|\sin'(t)| = |\cos(t)| \leqslant 1$ et l'inégalité des accroissements finis assure que $|\sin(x) - \sin(0)| \leqslant 1|x - 0|$ d'où le résultat.

Exemple n° 10 Donner une valeur approchée de $\sqrt{401}$

La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $[400; 401]$ et sa dérivée $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante donc, $\forall x \in [400; 401]$, $\frac{1}{2\sqrt{401}} \leqslant f'(x) \leqslant \frac{1}{2\sqrt{400}}$.
L'inégalité des accroissements finis donne donc :
$$\frac{1}{2\sqrt{401}}(401-400) \leqslant \sqrt{401} - \sqrt{400} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{400}}(401-400)$$
$$\frac{1}{2\sqrt{401}} + 20 \leqslant \sqrt{401} \leqslant \frac{1}{40} + 20$$
On peut prendre $\sqrt{401} \approx 20 + \frac{1}{2\sqrt{400}} = 20 + \frac{1}{40} = 20,025$.

Pour un encadrement, on peut observer que $20,025^2 > 401$
et donc $20 + \frac{1}{2\times 20,025} < \sqrt{401} < 20,025$ d'où $20,0249 < \sqrt{401} < 20,025$

Caractérisation des variations d'une fonction

Propriété 17 ***(Variations de fonctions dérivables)***

Soit $a < b$ et f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

f est croissante sur $[a, b]$	ssi	$\forall x \in]a, b[$,	$f'(x) \geqslant 0$.
f est décroissante sur $[a, b]$	ssi	$\forall x \in]a, b[$,	$f'(x) \leqslant 0$.
f est constante sur $[a, b]$	ssi	$\forall x \in]a, b[$,	$f'(x) = 0$.

Preuve : On va montrer le premier point. Le deuxième point s'obtient en appliquant le premier point à $-f$, et le troisième point s'obtient avec la réunion des deux premiers points.

($\Rightarrow$) Supposons que f est croissante sur $[a, b]$. Soit $x_0 \in]a, b[$, pour tout $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$, on a :
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0.$$

Par passage à la limite quand x tend vers x_0 (la limite existe et est finie par définition de $f'(x_0)$), on obtient $f'(x_0) \geqslant 0$.
Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in]a,b[$, cela donne la positivité de f' sur $]a,b[$.

($\Leftarrow$) Supposons que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geqslant 0$. Soit x et y dans $[a,b]$, tels que $x < y$.
La fonction f étant continue sur $[x,y]$ et dérivable sur $]x,y[$, l'inégalité des accroissements finis (dont on utilise seulement la partie minoration) donne alors :

$$0(y-x) \leqslant f(y) - f(x).$$

D'où $f(x) \leqslant f(y)$. Comme c'est vrai pour tout couple (x,y) tel que $x < y$, la fonction f est croissante sur $[a,b]$.

□

On peut adapter ce résultat pour montrer la stricte monotonie :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$,

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Plus généralement, si pour tout $x \in J$, $f'(x) > 0$, où J est l'intervalle I sauf éventuellement en un nombre fini de points où f' s'annule, alors f est strictement croissante sur I (Cette propriété peut même s'appliquer s'il existe un nombre fini de points où f n'est pas dérivable).

Le résultat est faux si on ne se place pas sur un intervalle !

Par exemple,
$\mathbb{R}^* \ni x \mapsto \frac{1}{x}$ possède une dérivée négative et n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

De même, la restriction de la fonction partie entière à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ a une dérivée nulle et n'est pas constante.

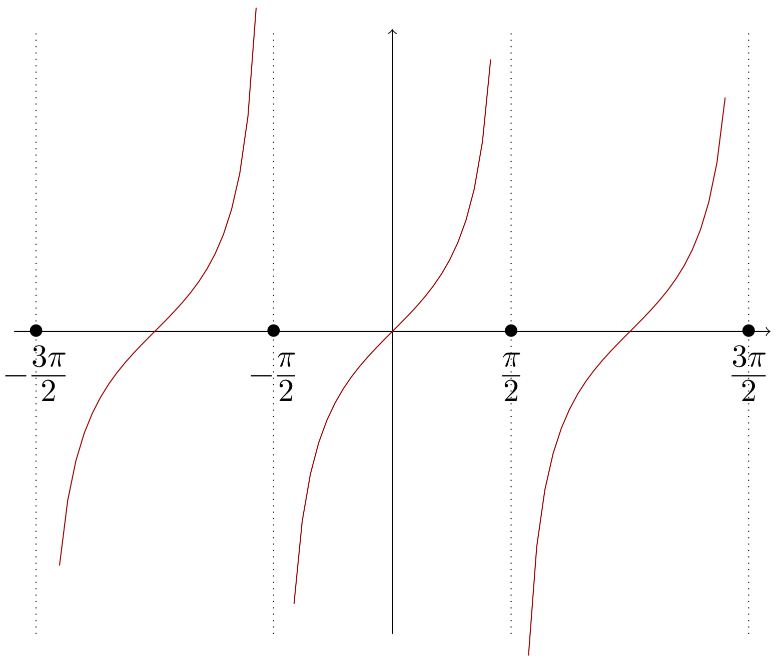
Fonction arc tangente

FONCTION TANGENTE

Définition 5 ***(Tangente)***

La <u>fonction tangente</u> est définie sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$$\forall x \in I, \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$



Propriété 18 ***(Dérivée de tangente)***

La fonction tangente est dérivable sur $I = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$, et

$$\forall x \in I, \quad \tan'(x) = 1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$$

Preuve : La fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables, $\forall x \in I$:

$$\tan'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2},$$

ce qui donne les deux formules annoncées. □

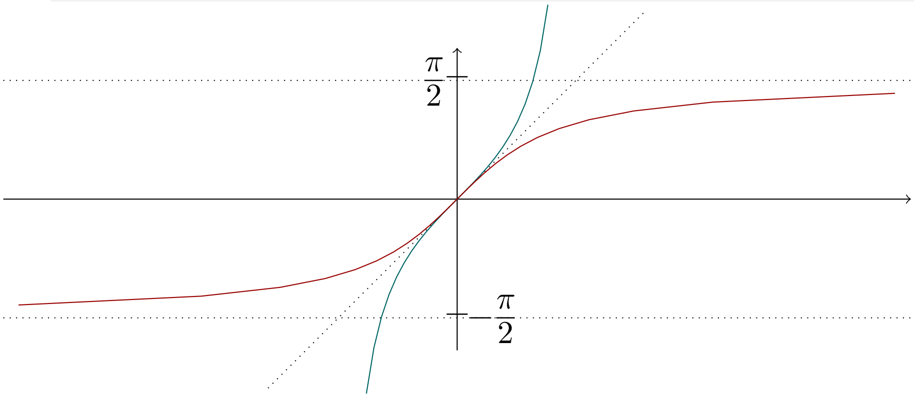
FONCTION ARC TANGENTE

Définition 6 ***(Arc tangente)***

La restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

Sa bijection réciproque est appelée **arc tangente**, et est notée $\arctan$.

Preuve : La fonction tangente est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, de dérivée $1+\tan(x)^2>0$, donc elle est strictement croissante sur cet intervalle. Elle est de plus continue (car dérivable) sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.
Ainsi, d'après le théorème de la bijection, la restriction de $\tan$ à $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ effectue une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\tan\left(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\right)$.
En étudiant les limites de $\tan$ en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$, on trouve $-\infty$ et $+\infty$, ce qui montre que $\tan$ (sa restriction) réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$. Donc la bijection réciproque existe bien, d'où la preuve de l'existence. □



Le théorème de la bijection donne au passage que la fonction arc tangente est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$.

Propriété 19 ***(Dérivée de arc tangente)***

La fonction arc tangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie : $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Preuve : On utilise la formule de la dérivée de la réciproque : tangente est dérivable et strictement monotone sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et sa dérivée ne s'annule jamais. Donc arc tangente est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$, et : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\arctan'(x)=\dfrac{1}{1+\tan\left(\arctan(x)\right)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Dérivées successives

DÉFINITIONS

Définition 7 ***(Classe $\mathcal{C}^1$, rappels)***

On dit que f est <u>de classe $\mathcal{C}^1$</u> sur I lorsque f est dérivable sur I et que f' est continue sur I. On note alors $f\in\mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$.

Définition 8 ***(Classe $\mathcal{C}^2$)***

On dit que f est deux fois dérivable sur I lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et que f' est dérivable sur I. On note alors $(f')'=f^{(2)}$.
On dit que f est <u>de classe $\mathcal{C}^2$</u> sur I lorsque f est deux fois dérivable sur I et que $f^{(2)}$ est continue sur I. On note alors $f\in\mathcal{C}^2(I,\mathbb{R})$.

On peut ensuite définir récursivement toutes les dérivées suivantes : soit p un entier naturel non nul, si $f^{(p)}$ est dérivable sur I alors f est $(p+1)$ fois dérivable sur I, avec pour tout $x\in I$, $f^{(p+1)}(x)=\left(f^{(p)}\right)'(x)$. Si, de plus, $f^{(p+1)}$ est continue sur I alors f est de classe $\mathcal{C}^{p+1}$ sur I.

Définition 9 ***(Classe $\mathcal{C}^\infty$)***

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I lorsque f est indéfiniment dérivable, c'est à dire dérivable à tout ordre. On note alors $f \in \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$.

Si f est continue sur I, on notera par convention $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $f^{(0)} = f$.

Dérivées successives des fonctions usuelles

La plupart des fonctions usuelles sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle inclus dans leur domaine de dérivabilité. Les formules suivantes se montrent par récurrence :

$f(x)$	$D_{f'}$	$f^{(n)}(x)$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
x^p ($p \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$\begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si } n \leqslant p \\ 0 & \text{si } n > p \end{cases}$
x^α ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$)	$\mathbb{R}_+^*$	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1}(\alpha-i)\right)x^{\alpha-n}$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$
$\dfrac{1}{a+x}$	$\mathbb{R} \setminus \{-a\}$	$\dfrac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}$
$\dfrac{1}{a-x}$	$\mathbb{R} \setminus \{a\}$	$\dfrac{n!}{(a-x)^{n+1}}$

Preuve (D.A.C) Il faut savoir retrouver/démontrer ces formules. Le détail est laissé en exercice, mais pourrait être demandé en colle.

Règles de calcul

Linéarité et ordre des dérivées

Propriété 20 ***(Linéarité des dérivées successives)***

Soit $p \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, et soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Alors :

- $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}$.
- αf est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I et $(\alpha f)^{(p)} = \alpha f^{(p)}$.

Preuve : On montre le résultat par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$ en utilisant pour l'hérédité la linéarité de la dérivée.

Propriété 21 ***(Dérivées d'une fonction polynomiale)***

Soit $p \in \mathbb{N}$. La dérivée $(p+1)$-ème d'une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à p est nulle.

Propriété 22 ***(Ordre des dérivées)***

Soit $p \in \mathbb{N}$, et soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^p$ sur l'intervalle I. Alors :

- $\forall (m,q) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m+q \leqslant p$, $\left(f^{(m)}\right)^{(q)} = \left(f^{(q)}\right)^{(m)} = f^{(m+q)}$.
- $\forall m \in [\![0, p-1]\!]$, $\left(f^{(m)}\right)' = (f')^{(m)} = f^{(m+1)}$.

Propriété 23 THÉORÈME DE COMPOSITION

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, f une application définie de I dans $\mathbb{R}$ et g une application définie de J dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Alors :

- Si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I.
- Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^n$ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Preuve :

On montre le premier point, le deuxième se montre avec une démarche similaire. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: « si f est dérivable n fois sur I et g est dérivable n fois sur J, alors $g \circ f$ est dérivable n fois sur I ».

- Soit $n = 0$, et f et g deux fonctions dérivables 0 fois sur I et J respectivement.
  Alors $g \circ f$ est dérivable 0 fois sur I et $P(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $P(n)$ est vraie. Soit f et g deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I et J respectivement. Elles sont en particulier dérivables, et par théorème de dérivation des fonctions composées, $g \circ f$ est dérivable sur I, avec $(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f'$.
  Par hypothèse, les fonctions g' et f sont n fois dérivables sur J et I respectivement, et donc par $P(n)$ $(g' \circ f)$ est n fois dérivable sur I. Comme de plus f' est n fois dérivable sur I, par produit $(g \circ f)'$ est n fois dérivable. Donc $g \circ f$ est $n+1$ fois dérivable, et $P(n+1)$ est vraie.

D'où le résultat. □

Propriété 24

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point, f une application définie de I dans $\mathbb{R}$ et g une application définie de J dans $\mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

vu dans les rapports

ECRICOME 2017 : Il est dommage que certains candidats ne voient pas que leur tableau de variations contredit les réponses trouvées dans la question précédente.

ECRICOME 2017 : On peut souligner que la plupart des candidats prennent le temps de justifier correctement et efficacement que f et g sont dérivables.

compléments sur les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$

L'inégalité des accroissements finis donne de nouveaux outils pour étudier les suites de ce type. Nous avons maintenant presque tous les outils pour mener à bien ce type d'étude, très fréquent dans les sujets.

Vous êtes invités à réaliser une fiche bilan sur ces suites, reprenant les différentes techniques utilisées depuis le début de l'année dans ce cadre (point fixe et continité, récurrence, IAF, TLM...)

Vous êtes aussi invités à mettre en commun vos fiches.

PROTOCOLE D'ÉTUDE :
Pour étudier une suite définie par $u_0 \in \mathcal{D}_f$ et la relation : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$, on peut suivre les étapes suivantes (qui seront peut-être détaillées dans les questions)

1 **on montre que la suite est bien définie.**
Pour cela, il suffit de prouver que $f(\mathcal{D}_f) \subset \mathcal{D}_f$
(ou à défaut on prouve par récurrence que, pour tout n, $u_n \in \mathcal{D}_f$).

2 ***f* est continue sur $\mathcal{D}_f$. Si *f* converge vers un réel ℓ, alors $f(\ell) = \ell$.**

3 Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \in [a;b]$, alors $\ell \in [a,b]$ et si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a;b[$ et vérifie $|f'| \leqslant k$ sur $]a;b[$, on obtient avec l'**inégalité des accroissements finis :**

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant k|u_n - \ell|$$

c'est à dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant k|u_n - \ell|$$

3 et par récurrence, on prouve que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leqslant k^n |u_0 - \ell|$$

Et donc si $k < 1$, la suite converge d'après le théorème d'encadrement (et on a un majorant de l'écart à la limite !)

Exercices

exercice 1
On définit f sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :
$$\forall x \neq 0, \quad f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$
Montrer que f est constante sur chaque intervalle où elle est définie.

Proposition de corrigé :

f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et, pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} \times \frac{1}{1+(\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$$
Ainsi, f est constante sur chaque intervalle où elle est dérivable.
Donc f est constante sur $]-\infty; 0[$ et constante $]0; +\infty[$.

On sait que $\tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ donc $f(1) = 2\arctan(1) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ donc,
pour tout $x < 0, \quad f(x) = \frac{\pi}{2}$
de même, $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Finalement, $\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ \frac{-\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

Remarque : on pouvait aussi utiliser les limites en $\pm\infty$

exercice 2 Soit a un nombre réel.
Déterminer une condition sur a pour que la fonction
$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ \sin(ax) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$
soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

Proposition de corrigé :

f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ car égale à une fonction de référence dérivable sur ces intervalles.
Étudions la dérivabilité en 0.

• $\forall x > 0, \quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{\sin(ax)}{x} = a\dfrac{\sin(ax)}{ax} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} a \times 1 = a$
donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = a$
• $\forall x < 0, \quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x}{x} = 1 \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1$
donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 1$
• Finalement f est dérivable ssi $f'_g(0) = f'_d(0)$ donc ssi $a = 1$

exercice 3 Retrouver l'expression de la fonction dérivée de $x \mapsto \ln(x)$ en utilisant le fait qu'il s'agit de la bijection réciproque de $x \mapsto \mathrm{e}^x$.

Proposition de corrigé :

La fonction exponentielle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.
Comme sa dérivée ne s'annule pas, sa bijection réciproque $\ln$ est dérivable sur $]0;+\infty[$ et,
pour tout $x>0$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln(x))} = \dfrac{1}{\exp(\ln(x))} = \dfrac{1}{x}$

exercice 4 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable et telle que

$$f(a) = f'(a) \text{ et } f(b) = f'(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ telle que $f(c) = f''(c)$
on pourra introduire la fonction $g : x \mapsto \mathrm{e}^x\left[f(x) - f'(x)\right]$

Proposition de corrigé :

La fonction g introduite est dérivable sur $[a;b]$, comme produit et somme de fonctions dérivables sur $[a;b]$.
Pour tout $x \in [a;b]$, $g'(x) = \mathrm{e}^x\left[f(x) - f'(x)\right] + \mathrm{e}^x\left[f'(x) - f''(x)\right] = \mathrm{e}^x\left[f(x) - f''(x)\right]$

Or, on sait que $f(a) = f'(a)$ et $f(b) = f'(b)$.
On a alors $g(a) = g(b) = 0$ et, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$.
On a alors $\mathrm{e}^c\left[f(c) - f''(c)\right] = 0$ donc $f(c) - f''(c) = 0$ car $e^c \neq 0$.
$\boxed{\text{Finalement, il existe } c \in]a;b[\text{ tel que } f(c) = f''(c)}$

exercice 5 Prouver que, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $|\tan(x)| \geqslant |x|$

Proposition de corrigé :

Notons f la restriction de $\tan$ à $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.
f est dérivable sur son domaine de définition et, pour tout $x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $f'(x) = 1 + \cos^2(x) > 1$
L'inégalité des accroissements finis appliquée à f sur $[0;x]$ avec $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ donne :

$$1(x-0) \leqslant f(x) - f(0) \quad \text{d'où} \quad x \leqslant \tan(x)$$

L'imparité de $\tan$ permet de conclure que, $\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad |\tan(x)| \geqslant |x|}$

exercice 6

1. Prouver que, pour tout $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant x - \ln(1+x) \leqslant \frac{x^2}{2}$
2. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$

Proposition de corrigé :

1. Notons f la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln(1+x)$.
   f est dérivable sur I comme somme et composée de fonctions dérivables sur I.
   Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{x}{1+x} > 0$.
   Donc f est croissante et, pour tout $x > 0$, $f(x) \geqslant f(0) = 0$.
   De même, notons g la fonction définie sur $I =]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(1+x) - \dfrac{x^2}{2}$. Pour tout $x \in I$, $g'(x) = \dfrac{x}{1+x} - x = \dfrac{x-x-x^2}{1+x} = \dfrac{-x^2}{1+x} < 0$.
   Donc g est décroissante et, pour tout $x > 0$, $g(x) \leqslant g(0) = 0$ c'est à dire $x - \ln(x) \leqslant \frac{x^2}{2}$.
   Finalement, on a bien $\boxed{\forall x \in]0;+\infty[, 0 \leqslant x - \ln(x) \leqslant \frac{x^2}{2}}$
2. On déduit de ce qui précède que, $\forall (k,n) \in (N^*)^2$, on a :
$$0 \leqslant \frac{k}{n^2} - \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k^2}{2n^4}$$
   En sommant membre à membre pour $k \in [\![1;n]\!]$, on obtient, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2n^4}$$
$$\text{d'où} \quad 0 \leqslant \frac{n(n+1)}{2n^2} - \ln\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right] \leqslant \frac{n(n+1)(2n+1)}{12n^4}$$
$$\text{Ainsi,} \quad \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leqslant \ln(u_n) \leqslant \frac{n+1}{2n}$$
   On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} = \dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{12n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
   De plus, $\dfrac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et le théorème d'encadrement donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = \dfrac{1}{2}$
   Par continuité de la fonction exponentielle, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{\mathrm{e}}}$

exercice 7 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}^* \\ u_{n+1} = 2 + \dfrac{1}{u_n^2} & \text{pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > 2$
2. Soit f la fonction définie sur $I = [2; +\infty[$ par $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x^2}$.
   Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ dans I.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \ell|$
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$
5. Conclure sur la convergence de (u_n)

Proposition de corrigé :

1. Pour tout $u_0 \in \mathbb{R}^*$, $u_1 > 0$ et une récurrence immédiate donne : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 2$
2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
$$f(x) = x \iff 2 + \frac{1}{x^2} - x = 0 \iff -x^3 + 2x^2 + 1 = 0$$
Notons $g : x \mapsto -x^3 + 2x^2 + 1$. g est dérivable, car polynômiale et, pour tout réel x, $g'(x) = -3x^2 + 4x = x(-3x + 4) < 0$ sur $[2; +\infty[$
Donc g est strictement décroissante sur I et continue (car dérivable) donc réalise une bijection de $I = [2; +\infty[$ sur $g(I) = \left]\lim\limits_{+\infty} g; g(2)\right] =]-\infty; 1]$.
Or, $0 \in g(I)$ donc admet un unique antécédent par g dans I.
$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x \text{ admet une unique solution dans } I}$
3. f est dérivable sur I, comme composée de fonctions dérivables sur I et, pour tout $x \in I$, on a : $f'(x) = \frac{-2}{x^3}$.
Ainsi, on a, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant |f'(2)| = \frac{1}{4}$

L'inégalité des accroissements finis permet donc d'affirmer que :
$$\forall (x; y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{1}{4}|x - y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a vu que $u_n \in I$ et $\ell \in I$. En évaluant en $x = u_n$ et $y = \ell$, on obtient :
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \ell|$$
4. Par récurrence :
$\boxed{\text{I}}$ Pour $n = 0$, $|u_0 - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^0 |u_0 - \ell|$. La propriété est vraie au rang 0.
$\boxed{\text{H}}$ Supposons $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$.
D'après **3.**, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - \ell| \underset{HR}{\leqslant} \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$
D'où $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0 - \ell|$. La propriété est héréditaire.
$\boxed{\text{C}}$ D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0 - \ell|$
5. Comme $\left|\frac{1}{4}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{4}\right)^n = 0$ donc, d'après le théorème d'encadrement, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, c'est à dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell}$.

exercice 8 On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner l'expression de $f'(x)$.

3. Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ n'existe pas. Conclure.

Proposition de corrigé :

1. f est clairement dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}^*$.
   En effet, elle est nulle sur $]-\infty; 0[$ et composée de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$.

   Étude en 0
   Comme, $\forall x > 0, \quad -1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$ on a $-x^2 \leqslant f(x) \leqslant x^2$.
   Or, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^2 = 0$ et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$
   Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ donc f est continue en 0.
   Finalement, $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

2. $\forall x \neq 0, \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ par un raisonnement similaire à ce qui précède.
   Ainsi, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
   Finalement, $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$

3. Par l'absurde. Supposons f' continue en 0. Alors $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = f'(0) = 0$.
   Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \times \dfrac{-1}{x^2} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   Or, $\lim\limits_{x \to 0+} 2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$
   donc, $\lim\limits_{x \to 0+} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left[2x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - f'(x)\right] = 0$ par somme de limites.

   Mais ceci implique $\lim\limits_{x \to 0+} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{u \to +\infty} \cos(u) = 0$ ce qui est absurde car cos n'a pas de limite en $+\infty$, ce qui est absurde.
   $\boxed{\text{Finalement, } f' \text{ n'est pas continue en } 0}$

exercice 9 Soit f une fonction telle que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|\, f(x) - f(y)\,| \leqslant (x-y)^2$$

Montrer que f est constante.

Proposition de corrigé :

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé.
Pour tout $y \neq x$, $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = |\,x-y\,| \underset{y\to x}{\longrightarrow} 0$ donc f est dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 0$.

$\mathbb{R}$ étant un intervalle, $\boxed{f \text{ est constante}}$.

aviez-vous pensé à l'argument « intervalle » ?

exercice 10 Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{x^2+1} < \arctan(x) < x$$

Proposition de corrigé :

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Soit $x > 0$.
Le théorème des accroissements finis assure l'existence de $c \in]0;x[$ tel que

$$\frac{\arctan(x) - \arctan(0)}{x-0} = f'(c)$$

Comme f' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}+$, on a, pour tout $t \in]0;x[$, on a

$$f'(x) < f'(t) < f'(0)$$

Donc

$$\frac{1}{1+x^2} < f'(c) < 1$$

d'où

$$\frac{1}{1+x^2} < \frac{\arctan(x)}{x} < 1$$

puis

$$\frac{x}{1+x^2} < \arctan x < x \text{ (car } x > 0)$$

*Remarque 1 : on aurait pu utiliser l'IAF, qui reste vraie avec des inégalités strictes.
Mais le résultat le plus répandu se formule avec des inégalités larges.
Comme il n'est pas beaucoup plus long de rédiger avec le TAF, c'est plus sûr.*

Remarque 2 : on aurait aussi pu étudier (séparément) les fonctions $x \mapsto x - \arctan x$ et $x \mapsto \arctan(x) - \frac{x}{1+x^2}$ et montrer (dérivée, étude...) qu'elles sont positives. C'est a priori beaucoup plus long.

exercice 11

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ polynôme non nul. admettant n racines réelles distinctes.
Montrer que P' admet exactement $n-1$ racines réelles distinctes.

Proposition de corrigé :(il faut chercher avant de regarder la solution ^^)

Notons $(r_1, ..., r_n) \in \mathbb{R}^n$ les racines de P. Sans perdre en généralité, on peut supposer $r_1 < r_2 < ... < r_n$.

P vu comme fonction polynômiale est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie :
Pour tout $k \in [\![1; n-1]\!]$, $P(r_k) = P(r_{k+1}) = 0$ et, d'après le théorème de Rolle,
il existe $r'_k \in \,]r_k; r_{k+1}[$ tel que $P'(r'_k) = 0$
On a alors, pour tout $k \in [\![1; n-2]\!]$, $r'_k < r_{k+1} < r'_{k+1} < r_{k+2}$ de sorte que les réels $r'_1, ..., r'_{n-1}$ sont $n-1$ racines distinctes de P'
Comme $P \neq 0$, notons $n \in \mathbb{N}$ le dégré de P. Alors $\deg P' = n-1$ et les $n-1$ racines trouvée sont exactement les racines de P' qui ne peut en avoir plus car de degré $n-1$.

$$\boxed{P' \text{ admet exactement } n-1 \text{ racines réelles distinctes.}}$$

- A quoi sert l'hypothèse 'non nul' ?
- on ne peut avoir $\deg P = 1$ ici... pourquoi ?

variante : on peut aussi trouver : si P admet k racines réelles distinctes, montrer que P' admet au moins $k-1$ racines réelles distinctes.
Il faut alors bien penser qu'en cas de racine double r_k, on a bien r'_k racine **et** r_k qui 'reste' racine de P' s'ajoute aux $k-1$...
On peut donc généraliser le résultat avec la multiplicité mais ça devient plus technique à rédiger.

---

exercice 12 (EML ECE, 2001)

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

1. a. Calculer $f'(x)$.
   b. Pour tout $x > 0$, exprimer $f''(x)$ en fonction de $g(x)$ où g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = xe^x - 2e^x + x + 2$
   c. Étudier les variations de g et en déduire que $f''(x) > 0$.
   d. Étudier les variations de f sur son domaine de définition en précisant les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.

   Nous verrons au deuxième semestre comment prouver que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

   Ce résultat pourra être admis dans la suite du sujet.

2. On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[, \,|\, f'(x) \,|\, \leqslant \frac{1}{2}$ et $0 < f(x) < 1$
   b. Résoudre l'équation $f(x) = x$ d'inconnue $x \in]0; +\infty[$.
   c. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |\, u_{n+1} - \ln(2) \,| \leqslant \frac{1}{2} \,|\, u_n - \ln(2) \,|$.
   d. Établir que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Proposition de corrigé :

1.

a. f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle, le dénominateur ne s'annulant pas.

Pour tout $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1(\mathrm{e}^x-1)-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}$

$$\boxed{\text{Pour tout } x>0,\ f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1}{(\mathrm{e}^x-1)^2}}$$

b. f' est dérivable comme somme et quotient de fonctions de références dérivables sur $]0;+\infty[$, le dénominateur ne s'annulant pas. Soit $x>0$.

$f''(x)=\dfrac{(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x)(\mathrm{e}^x-1)^2-2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)^4}$

$f''(x)=\dfrac{-x\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-1)-2\mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x-1)}{(\mathrm{e}^x-1)^3}$

$f''(x)=\dfrac{-x\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^{2x}+2x\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^3}$

$f''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x(x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+x+2)}{(\mathrm{e}^x-1)^3}$

$\boxed{f''(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x g(x)}{(\mathrm{e}^x-1)^3}}$

c. Étudier les variations de g et en déduire que $f''(x)>0$. g est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x>=0$,

$$g'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x-2\mathrm{e}^x+1=(x-1)\mathrm{e}^x+1$$

g' est dérivable et, pour tout $x>=0$,

$$g''(x)=\mathrm{e}^x+(x-1)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x>0$$

g' est strictement croissante donc, pour tout $x>0$, $g'(x)>g'(0)=0$

Ainsi, $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [0;+\infty[}$

On en déduit que $g(x)>g(0)=0$.

Or, pour $x>0$, $f''(x)$ est du signe de $g(x)$ donc $\boxed{f''(x)>0}$

d. Ainsi, f' est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=0$

donc $f'<0$ sur $]0;+\infty[$.

Finalement, $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur }]0;+\infty[}$.

2. a. Montrer : $\forall x\in]0;+\infty[,\ |\,f'(x)\,|\leqslant\frac{1}{2}$ et $0\leqslant f(x)\leqslant 1$

On sait que f' est croissante et négative d'après ce qui précède. De plus $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)=-\dfrac{1}{2}$. Ainsi,

$$-\frac{1}{2}\leqslant f'(x)\leqslant 0\leqslant\frac{1}{2}$$

donc

$$\boxed{\forall x>0,\ |\,f'(x)\,|\leqslant\tfrac{1}{2}}$$

De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$|\,f(x)\,|\leqslant\lim_{x\to 0}|\,f'(x)\,|=\frac{1}{2}.$$

De plus, f étant strictement décroissante on a, pour tout $x>0$,

$$1=\lim_{x\to 0} f(x)>f(x)>\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Finalement, $\boxed{|\,f'(x)\,|\leqslant\tfrac{1}{2} \text{ et } 0<f(x)<1}$

b. Sur $]0;+\infty[$, on a les équivalences :

$$f(x)=x\iff\frac{x}{\mathrm{e}^x-1}=x\iff\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=1\iff\mathrm{e}^x-1=1\iff\mathrm{e}^x=2\iff x=\ln(2)$$

$\boxed{\text{L'unique solution de l'équation sur }]0;+\infty[\text{ est } \ln(2)}$.

c. On sait que f est prolongeable par continuité sur $[0;1]$ car $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

f est dérivable sur $]0;1[$. De plus, pour tout $x\in]0;1[,\ |\,f'(x)\,|\leqslant\frac{1}{2}$ donc, d'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tous $(a,b)\in[0;1]^2$:

$$|\,f(b)-f(a)\,|\leqslant\tfrac{1}{2}\,|\,b-a\,|$$

Or, la question 2.a. et une récurrence immédiate permettent de prouver que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in]0;1[$.

Donc l'inégalité précédente, appliquée à $a=u_n$ et $b=\ln(2)$ donne :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ |\,f(u_n)-f(\ln(2))\,|\leqslant\tfrac{1}{2}\,|\,u_n-\ln(2)\,|$$

$$\boxed{\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, \left| u_{n+1} - \ln(2) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| u_n - \ln(2) \right|}$$

d. Montrons par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$:« $\left| u_n - \ln(2) \right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left| u_n - \ln(2) \right|$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\boxed{\text{I}}$ Pour $n = 0$, $\left| u_0 - \ln(2) \right| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left| u_0 - \ln(2) \right|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$. Alors 2.c. donne :

$\left| u_{n+1} - \ln(2) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left| u_n - \ln(2) \right|$

d'où $\left| u_{n+1} - \ln(2) \right| \leqslant \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left| u_0 - \ln(2) \right|$ par hypothèse de récurrence.

d'où $\left| u_{n+1} - \ln(2) \right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \left| u_0 - \ln(2) \right|$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et l'hérédité est prouvée.

C D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| u_n - \ln(2) \right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n \left| u_n - \ln(2) \right|$.

Or, $\left| \frac{1}{2} \right| < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc le théorème des gendarmer assure que $\lim\limits_{n \to \infty} \left| u_n - \ln(2) \right| = 0$ c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)$.

$$\boxed{(u_n) \text{ est convergente et } \lim_{n \to +\infty} u_n = \ln(2)}$$

exercice 13 Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

On pose, pour tout réel $x \geqslant -1$, $f(x) = \sqrt{x+1}$

1. Montrer que $f([0;2]) \subset [0;2]$ et que : $\forall x \in [0;2], |\, f'(x)\,| \leqslant \frac{1}{2}$.
2. Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe de f dans $[0;2]$
3. Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
4. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, |\, u_{n+1} - r\,| \leqslant \dfrac{|\, u_n - r\,|}{2}$ puis que $|\, u_n - r\,| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
6. Déterminer un entier N tel que $|\, u_N - r\,| \leqslant 10^{-9}$
7. Écrire un programme `Python` donnant le plus petit entier N tel que $|\, u_N - r\,| \leqslant 10^{-9}$.
8. Écrire un programme `Python` donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

Proposition de corrigé :

1. f est strictement croissante, comme composée de fonction strictement croissantes.
Ainsi, pour tout $x \in [0;2]$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ et donc $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(2)$

Ainsi, $0 \leqslant 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3} \leqslant \sqrt{4}$ et $f(x) \in [0;2]$

$$\boxed{f([0;2]) \subset [0;2]}$$

on dit que $[0;2]$ est stable par f

2. $f(x) = x \iff \sqrt{x+1} = x \iff \begin{cases} x+1 = x^2 \\ x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x > 0 \end{cases}$
Le déterminant du trinôme est $\Delta = (-1)^2 + 4 = 5$ donc il y a deux racines $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$

Seule $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est positive. C'est donc l'unique point fixe de f.
De plus, $r = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{1+\sqrt{9}}{2} = 2$ donc $r \in [0;2]$.

3. Par récurrence.
• pour $n = 0$, $u_0 = 0 \in [0;2]$
• supposons $u_n \in [0;2]$ pour un certain $x \in \mathbb{N}$.
alors, comme par hypothèse de récurrence, $u_n \in [0;2]$, on a : $u_{n+1} = f(u_n) \in [0;2]$ d'après 2.
• d'après le principe de récurrence, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;2]$.

4. f est continue (car dérivable) sur $[0;2]$ et dérivable sur $]0;2[$ et, pour tout $x \in [0;2]$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. f' est décroissante donc, pour tout $x \in [0;2]$,$|\, f'(x)\,| \leqslant f'(0) = \frac{1}{2}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons donc appliquer l'inégalité des accroissements finis à $(u_n, r) \in [0;2]^2$, ce qui donne :

$$|\, f(u_n) - f(r)\,| \leqslant |\, u_n - r\,|$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \left|\, u_{n+1} - r\,\right| \leqslant \tfrac{1}{2}\,|\, u_n - r\,|}$$

Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, |\, u_n - r\,| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

• pour $n = 1$, on a bien $|\, u_0 - r\,| = 0 = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^0$
• supposons que l'on ait $|\, u_n - r\,|$ pour un certain entier $n \geqslant 1$.
Alors $\left|\, u_{n+1} - r\,\right| \leqslant \frac{1}{2}\,|\, u_n - r\,|$ d'après le résultat précédent et l'hypothèse de récurrence donne alors :
$\left|\, u_{n+1} - r\,\right| \leqslant \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$
$\left|\, u_{n+1} - r\,\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1}$ d'où l'hérédité.

- Conclusion : d'après le principe de récurence, $\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad |u_n - r| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

5. $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.
   Le théorème des gendarmes permet alors de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |u_n - r| = 0$ et donc
   $$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } r = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

6. On obtiendra la précision voulue si $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \leqslant 10^{-9}$, donc si $2^n > 10^9$.
   En utilisant l'approximation par valeurs inférieures $2^{10} = 1024 \approx 10^3$,
   on obtient que $(2^{10})^3 \geqslant 10^9$.
   $$\boxed{\text{pour } N = 30, \text{ on a } |u_N - r| \leqslant 10^{-9}}$$

7.

```python
import numpy as np
u = 0
n = 0
r = (1+np.sqrt(5))/2
while abs(u-r) > 10**(-9) :
    u = np.sqrt(1+u)
    n = n+1
print(n)
```

   on trouve $N = 19$

8. il suffit de remplacer `disp(n)` par `disp(u)`

exercice 14 **EML 1996 (Voie E)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. a. Montrer que f est paire.
   Etudier les variations de f et tracer l'allure de sa courbe dans repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

   b. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier : $0 \leq \ell \leq \dfrac{1}{2}$
   on donne : $f(1/2) < 1/2$

   c. Montrer que pour tout réel x : $|\, f'(x)\,| \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$

2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$ puis $|u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2^{n+1}}$

   c. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

   d. Ecrire un programme Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Proposition de corrigé :

1. a. f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est symétrique et, pour tout réel x,
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}}+1} = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = f(x)$$
Donc f est paire
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}+1)-e^x e^{2x}2}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x-e^{3x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x}{(e^{2x}+1)^2}\left(1-e^{2x}\right)$ du signe de $1-e^{2x}$.
f est donc croissante sur $]-\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x}+1 = 1$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.
Par parité de f, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

   b. On pose, pour tout réel x, $g(x) = f(x) - x$.

> on peut dériver g mais l'étude du signe de g' n'est pas simple. Dans ce cas, on peut chercher une autre manière de répondre à la question, ou édudier une fonction annexe (le numérateur), ce qui veut dire nouvelle dérivée...

On a vu que $f > 0$ sur $]-\infty; 0]$. Donc $g > 0$ sur $]-\infty; 0]$. f et $x \mapsto -x$ sont strictement décroissantes sur $[0; +\infty[$ donc g est strictement décroissante comme somme de fonctions strictement décroissantes, et continue (comme somme de fonctions continues car dérivables) et g réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur $g([0; +\infty[) = \left]\lim\limits_{+\infty} g; g(0)\right[= \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$
Comme $0 \in]-\infty, 1/2]$ alors l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}^+$
De plus $g(1/2) = f(1/2) - 1/2 < 0$ donc $g(0) = 1/2 \geq g(\ell) \geq g(1/2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils en sont éléments, $0 \leq \ell \leq \dfrac{1}{2}$. Donc

$$\boxed{\text{l'équation } f(\ell) = \ell \text{ a une unique solution } \ell \text{ et } 0 \leq \ell \leq \tfrac{1}{2}}$$

c. D'après le calcul de **1.a)**, pour tout réel x,
$f'(x) = f(x) \times \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}$

Pour $x \leqslant 0$, $f'(x) > 0$ et $|\,f'(x)\,| = f'(x) = f(x) \times \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1} \leqslant f(x) \times \frac{1}{e^{2x}+1} \leqslant f(x)$
Pour $x \geqslant 0$, $f'(x) > 0$ et
$|\,f'(x)\,| = -f'(x) = f(x) \times \frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1} = f(x) \times \frac{1+e^{2x}-2e^{2x}}{e^{2x}+1} = f(x)\left(1 - \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}\right) \leqslant f(x)$

on pouvait aussi utiliser le fait que si f est paire, alors f' est impaire...

Et comme f est maximale en 0 on a bien pour tout réel x : $\boxed{|\,f'(x)\,| \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}}$

2. 1. Par récurrence : $\boxed{\text{I}}$ pour $n = 0$ on a $u_0 = 0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
   $\boxed{\text{H}}$ Soit n tel que $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ alors $0 \leq u \leq 1/2$
   Alors par décroissance de f sur $\mathbb{R}^+$, $f(0) \geq f(u_n) \geq f(1/2) \geq 0$
   donc $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$
   $\boxed{\text{C}}$ D'après le principe de récurrence, pour tout entier n : $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$

   2. D'après l'inégalité des accroissements finis, comme $(u_n; \ell) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2$ et que $|f'| \leq \frac{1}{2}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ alors
   $$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$
   c'est à dire
   $$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$
   Par récurrence immédiate, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^n}\,|\,u_0 - \ell\,|$ et comme $\ell \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$, $|\,u_0 - \ell\,| \leq \frac{1}{2}$
   d'où
   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}}$$

   3. Alors comme $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ 0, avec l'encadrement précédent, le théorème des gendarmes assure $|u_n - \ell| \to 0$ et donc
   $$\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

   4. u_n donnera une valeur approvchée de ℓ à 10^{-3} près si $|u_n - \ell| \leq 10^{-3}$ donc si $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$ ou $2^{n+1} \geqslant 10^3$ ou $(n+1)\ln(2) \geqslant 3\ln(10)$, c'est à dire $n \geqslant 3\frac{\ln(10)}{\ln(2)} - 1$

```
u = 0
for k in range(1,(3*np.log(10)/np.log(2))):
    u = np.exp(u)/(np.exp(2*u)+1)
print(u)
```

exercice 15 vu à l'oral de l'ENSAE 2018, filière ECS ***

Soit f une fonction continue $[0; 1] \to [0; 1]$, dérivable sur l'ouvert $]0; 1[$. On suppose que f' est croissante sur $]0; 1[$. On suppose que $f(1) < 1$, montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0; 1]$.

Proposition de corrigé :

Il s'agit de l'énoncé intégral d'un des deux exercices de l'oral.

Il y a deux associations d'idées à avoir : TAF et convexité.

Il est classique que si f est continue sur $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, 1]$, alors f admet un point fixe dans $[0, 1]$ (voir chapitre Étude globale d'une fonction)

Montrons que ce point fixe est unique. Soit x_1 et x_2 deux points fixes de f

Il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$
Comme x_2 et x_1 sont des points fixes, on trouve $(x_2 - x_1)(1 - f'(c)) = 0$

exercice 16 **Formule de Leibniz**

Soient f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle I. Alors la fonction fg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

Application : Étudier la dérivabilité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \mathrm{e}^x,$$

et calculer ses dérivées.

Proposition de corrigé : f et g sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, donc fg est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.
Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : « (fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} ».$$

I $(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(0-k)}$. Donc $P(0)$ est vraie.

H Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ est vraie. L'hypothèse de récurrence nous donne :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

En dérivant terme à terme, il vient :

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \binom{n}{0} f g^{(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} g f^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \text{ par la formule de Pascal}
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie, et l'hérédité est prouvée.

C D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Application :

On applique la formule de Leibniz à $x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto x^2$ qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et pour tout entier $n \geqslant 2$ et pour tout réel x,

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x g^{(k)}(x).$$

On en déduit par propriétés des dérivées d'un polynôme :

$$\begin{aligned}
f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} e^x g^{(k)}(x) \\
&= e^x x^2 + n e^x 2x + \frac{n(n-1)}{2} e^x 2 \\
&= e^x \left(x^2 + 2nx + n(n-1) \right).
\end{aligned}$$

On vérifie ensuite que la formule s'applique aussi pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui est bien le cas ici : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

exercice 17 **oral agro 2015**

L'exercice comprend 3 parties. La partie III peut être abordée sans que la partie II ait été traitée.

Partie I : définition d'une fonction

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout réel x, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx^2 + 1$.
(A) Démontrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle que l'on notera $r(t)$.
On note r l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout réel positif t, associe le réel $r(t)$.

Partie II : ébauche de la courbe de la fonction r

On a construit la représentation graphique de la fonction P_2 sur la figure 1 ci-dessous.
(B) Expliquer comment il est possible de construire sur cette figure le point de coordonnées $(2; r(2))$.

(C) Avec le logiciel Geogebra, on a répété la construction précédente en faisant varier t de 0 à 10 avec un pas de 0,1. On a obtenu la figure 2 ci-dessous.

Figure 1

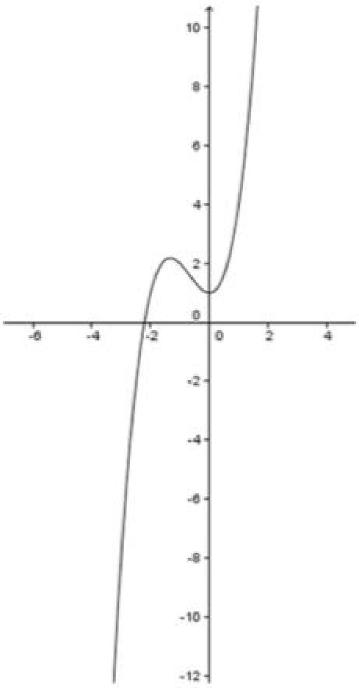
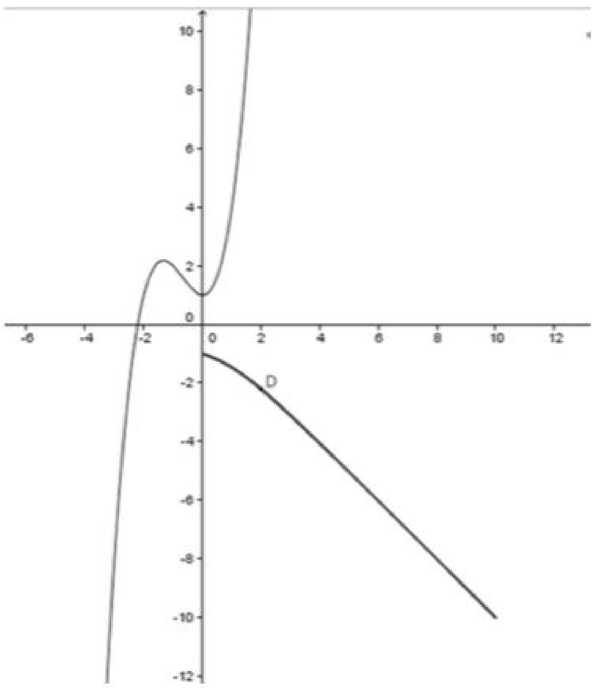


Figure 2



Que peut-on conjecturer relativement :

(i) à $r(0)$?
(ii) au signe de $r(t)$?
(iii) à la limite de la fonction r en $+\infty$?
(iv) à la branche infinie de la courbe de r en $+\infty$?

Démontrer ces conjectures.

D Démontrer que la fonction r réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty;1]$. Déterminer la fonction réciproque de la fonction r, que l'on nommera s.

E En déduire que la fonction r est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de r.

Partie III : approche informatique

F Rédiger une fonction informatique qui, recevant t et un entier n, renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-n} près.

G Utiliser cette fonction pour construire la courbe de r. Commenter la courbe obtenue.

Proposition de corrigé :**Partie I**

Soit t un réel positif ou nul. Pour tout réel x, on pose : $P_t(x) = x^3 + tx^2 + 1$.

A le polynôme P_t est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_t'(x) = 3x^2 + 2tx = x(3x + 2t)$$

On en déduit les variations de P_t qui est croissante sur $]-\infty;0[$, décroissante sur $]0;2t/3[$ et croissante sur $]2t/3;+\infty[$.

Or, $P_t(2t/3) = \frac{8t^3}{27} + \frac{4t^3}{16} + 1 > 0$ car $t > 0$ donc P_t ne s'annule pas sur $]0;+\infty[$.

Enfin, $\lim_{x\to-\infty} P_t'(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

$$\boxed{P_t \text{ admet une unique racine réelle que l'on notera } r(t).}$$

On note r l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ qui, à tout réel positif t, associe le réel $r(t)$.

Partie II : ébauche de la courbe de la fonction r

On a construit la représentation graphique de la fonction P_2 sur la figure 1 ci-dessous.

B Expliquer comment il est possible de construire sur cette figure le point de coordonnées $(2;r(2))$.

C Avec le logiciel Geogebra, on a répété la construction précédente en faisant varier t de 0 à 10 avec un pas de 0,1. On a obtenu la figure 2 ci-dessous.

Que peut-on conjecturer relativement :

(i) à $r(0)$?
(ii) au signe de $r(t)$?
(iii) à la limite de la fonction r en $+\infty$?
(iv) à la branche infinie de la courbe de r en $+\infty$?

Démontrer ces conjectures.

D Démontrer que la fonction r réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ vers $]-\infty;1]$. Déterminer la fonction réciproque de la fonction r, que l'on nommera s.

E En déduire que la fonction r est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Dresser le tableau de variation de r.

Partie III : approche informatique

F Rédiger une fonction informatique qui, recevant t et un entier n, renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-n} près.

G Utiliser cette fonction pour construire la courbe de r. Commenter la courbe obtenue.

Un complément HORS PROGRAMME (approfondissement ++)

Il peut être utile de connaître ce résultat, tentant mais hors programme, mais aussi sa démonstration dont certains mécanismes peuvent être réutilisés.

Théorème de la limite de la dérivée :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Mais comme ce théorème n'est pas au programme, il faut le démontrer à chaque usage.

Soit $x \in I \setminus \{a\}$. Si a n'est pas la borne supérieure de I, soit $x > a$.

Par hypothèse, f est continue sur $[a, x]$ et dérivable sur $]a, x[$ Ainsi, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c_x \in]a, x[$ tel que $f'(c_x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$.
Or, comme $c_x \in]a, x[$, $\lim\limits_{x \to a} c_x = a$ et, comme par hypothèse $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ existe, alors $\lim\limits_{x \to a} f'(c_x) = \ell$ et on en déduit que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et vaut ℓ.
On a bien prouvé que f est dérivable à droite en a et que $f'_d(a) = \ell$.
On montre de même, si a n'est pas la borne inférieure de I que $f'_g(a) = \ell$

Finalement, f est dérivable en a et $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} f'(x)$