Ce qu'il faut savoir faire à l'issue de la séquence...

- □ *Connaître et utiliser les différentes limites des fonctions de référence*
- □ *Connaître et utiliser les opérations sur les limites pour justifier la limite d'une fonction plus complexe.*
- □ *Utiliser la continuité d'une fonction pour justifier la limite d'une suite.*
- □ *Utiliser la continuité de f pourdéterminer les candidats limite d'une suite définie par une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$*

17 Continuité, Limites de fonctions

Définition

Dans tout le chapitre, les fonctions f considérées sont définies sur un ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Voisinage

Définition 1 ***(Voisinage d'un point)***

Soit x_0 un réel.

Un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert contenant x_0.

On dit qu'une fonction f est <u>définie au voisinage de</u> x_0 lorsqu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que $I \setminus \{x_0\} \subset D_f$.

f n'a pas besoin d'être définie au point x_0 pour être définie au voisinage de x_0.

<u>Exemple</u> n° 1 La fonction f telle que $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$ est définie au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

Définition 2 ***(Voisinage de l'infini)***

Un <u>voisinage</u> de $+\infty$ (resp. $-\infty$)
est un intervalle du type $]B, +\infty[$ (resp. $]-\infty, B[$), où $B \in \mathbb{R}$.

Limite et continuité de la fonction f en x_0

Définition 3 ***(Limite de f en x_0)***

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
$\ell \in \mathbb{R}$.

On dit que f admet pour <u>limite</u> ℓ en x_0 lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout élément $x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{x_0} f = \ell$.

Cela s'écrit également :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

Propriété 1 ***(Unicité de la limite)***

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.
Si f admet une limite réelle en x_0, alors cette limite est unique.

Preuve : Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On suppose que f admet deux limites réelles distinctes ℓ et ℓ' en x_0.
Soit $\varepsilon = \frac{|\ell - \ell'|}{3} > 0$, il existe donc $\eta > 0$ et $\eta' > 0$ tels que pour tout $x \in D_f$,

$$|x - x_0| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon \text{ et } |x - x_0| \leqslant \eta' \Longrightarrow |f(x) - \ell'| \leqslant \varepsilon.$$

Soit $x \in D_f$ tel que $|x - x_0| \leqslant \min(\eta, \eta')$. On trouve par inégalité triangulaire :

$$|\ell - \ell'| = |\ell - x + x - \ell'| \leqslant |\ell - x| + |x - \ell'| \leqslant 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|,$$

ce qui est absurde. D'où l'unicité. □

Définition 4 ***(Continuité)***

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

On dit que f est continue en x_0 lorsque
f est définie en x_0 et que f admet pour limite $f(x_0)$ en x_0.

En pratique, on peut montrer que $\lim\limits_{x\to x_0} |\,f(x) - f(x_0)\,| = 0$

Définition 5

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est continue sur A si f est continue en chaque point de A.

Limite à droite et à gauche au voisinage de x_0

Définition 6 ***(Limite à gauche)***

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, ou telle que x_0 est une borne de D_f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite à gauche ℓ en x_0 lorsque
pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0]$,

$$|\,f(x) - \ell\,| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \ell$.

Définition 7 ***(Limite à droite)***

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, ou telle que x_0 est une borne de D_f. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
La fonction f admet pour limite à droite ℓ en x_0 lorsque pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe un réel $\eta > 0$ tel que $\forall x \in D_f \cap [x_0, x_0 + \eta]$,

$$|\,f(x) - \ell\,| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \ell$.

Propriété 2

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$
$\ell \in \mathbb{R}$.

La fonction f admet pour limite ℓ en x_0 si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell.$$

Si $x_0 \in D_f$, il faut de plus ajouter la condition $\ell = f(x_0)$.

Exemple n° 2 Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \leqslant 0$ et $f(x) = 1$ si $x > 0$.
La fonction admet une limite à droite en 0, qui vaut 1, et une limite à gauche en 0, qui vaut 0. Elle n'admet par contre pas de limite en 0.

Définition 8 ***(Limite infinie au voisinage de x_0)***

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, ou telle que x_0 est une borne de D_f.
La fonction f admet pour limite $+\infty$ en x_0 lorsque pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$f(x) \geqslant A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

En quantificateurs, cela donne

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

En français, l'idée est : *on peut dépasser n'importe quelle valeur A (aussi grande qu'on veut) si on s'approche suffisamment près (à moins de η de x_0)*

De même, la fonction f admet pour limite $-\infty$ en x_0 lorsque
pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$f(x) \leqslant A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

En quantificateurs...
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists \eta > 0, \forall x \in D_f, |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow f(x) \leqslant A$

Définition 9 ***(Limite finie au voisinage de l'infini)***

Soit $\left| \begin{array}{l} f \text{ une fonction définie au voisinage de } +\infty. \\ \ell \text{ un réel.} \end{array} \right.$

La fonction f admet ℓ pour limite en $+\infty$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [B, +\infty[$,

$$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = \ell$.

En quantificateurs,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant B \Rightarrow |f(x) - l| \leqslant \varepsilon$$

En français, *On peut rendre l'écart entre $f(x)$ et la limite ℓ (c.à.d $|f(x) - \ell|$) aussi petit qu'on veut (plus petit que ε qu'on peut choisir aussi petit qu'on veut) si x est suffisamment grand (si x est plus grand qu'un certain x_0)*

Définition 10 ***(Limite infinie au voisinage de l'infini)***

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. La fonction f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ lorsque pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que pour tout $x \in D_f \cap [B, +\infty[$,

$$f(x) \geqslant A.$$

On note alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

En quantificateurs,

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$$

On peut également rencontrer les cas suivants :

- La fonction f admet ℓ pour limite en $-\infty$ lorsque
  pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]-\infty, B]$,
  $$|f(x) - \ell| \leqslant \varepsilon.$$
- La fonction f admet $+\infty$ pour limite en $-\infty$ lorsque
  pour tout $A > 0$, il existe $B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D_f \cap]-\infty, B]$,
  $$f(x) \geqslant A.$$

Propriété 3 ***(Unicité de la limite)***

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$).
Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$) existe, alors cette limite est unique.

Propriétés

Soit f et g deux fonctions.
Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels.
On suppose dans cette section que $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x)$ existe et que $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x)$ existe.

Opérations sur les limites

Attention : avant toute opération, il est indispensable d'établir *l'existence* de chacune des limites intervenant dans le calcul.

$\lim g$ \ $\lim f$	ℓ_1	$+\infty$	$-\infty$
ℓ_2	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$-\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Tableau 1.1 : Limite de $f + g$

$\lim g$ \ $\lim f$	$\ell_1 > 0$	0	$+\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1 \ell_2$	0	$+\infty$
0	0	0	F.I.
$+\infty$	$+\infty$	F.I.	$+\infty$

Tableau 1.2 : Limite de fg.
(on applique ensuite les règles de signes pour trouver des limites avec $\ell_i < 0$ ou $-\infty$.)

Propriété 4 ***(Limite de l'inverse)***

- Si $\lim\limits_{\alpha} f = \ell \neq 0$, alors $\lim\limits_{\alpha} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$.
- Si $\lim\limits_{\alpha} f = \pm\infty$, alors $\lim\limits_{\alpha} \frac{1}{f} = 0$.
- Si $\lim\limits_{\alpha} f = 0$ et $f > 0$ au voisinage de α, alors $\lim\limits_{\alpha} \frac{1}{f} = +\infty$.
- Si $\lim\limits_{\alpha} f = 0$ et $f < 0$ au voisinage de α, alors $\lim\limits_{\alpha} \frac{1}{f} = -\infty$.

Les limites pour le quotient s'obtiennent ensuite à partir de celles du produit et de l'inverse.

Propriété 5

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$, et f une fonction définie au voisinage de α.
Si la fonction f admet une limite finie au voisinage de α, alors f est bornée au voisinage de α.

Preuve :

On effectue la preuve dans le cas $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ la limite finie de f en α.
Soit $\varepsilon = 1 > 0$.
Alors $\exists \eta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D_f \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, $|\, f(x) - \ell \,| \leqslant 1$, c'est-à-dire $\ell - 1 \leqslant f(x) \leqslant \ell + 1$.
Donc f est bornée au voisinage de α (par $\ell - 1$ et $\ell + 1$). □

Propriété 6 ***(Passage à la limite dans une inégalité)***

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α, et soit ℓ_1 et ℓ_2 deux réels.
On suppose que pour x au voisinage de α, $f(x) < g(x)$.

Si f admet pour limite ℓ_1 en α et g admet pour limite ℓ_2 en α alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

Autrement dit, lors d'un passage à la limite, toute inégalité devient large.

Preuve :

On effectue la preuve dans le cas $\alpha \in \mathbb{R}$.
Soit $D = D_f \cap D_g$. On raisonne par l'absurde en supposant $\ell_1 > \ell_2$.
La fonction $f - g$ a pour limite $\ell_1 - \ell_2$ en α. On pose $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2}$.
Notre supposition donne $\varepsilon > 0$, il existe donc $\eta_1 > 0$ tel que $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1]$,

$$|\,(f-g)(x) - (\ell_1 - \ell_2)\,| \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire en particulier $0 < \varepsilon \leqslant f(x) - g(x)$. Donc

$$\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_1, \alpha + \eta_1], \quad f(x) > g(x).$$

Par ailleurs, on a supposé $f(x) \leqslant g(x)$ au voisinage de α. Il existe donc $\eta_2 > 0$ tel que :

$$\forall x \in D \cap [\alpha - \eta_2, \alpha + \eta_2], \quad f(x) \leqslant g(x).$$

Soit $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$. Alors $\forall x \in D \cap [\alpha - \eta, \alpha + \eta]$, on a à la fois $f(x) > g(x)$ et $f(x) \leqslant g(x)$, ce qui est impossible. D'où le résultat. □

En particulier

Si $f(x) > 0$ au voisinage de α et si f admet une limite ℓ en α alors $\ell \geqslant 0$.

Mais attention ...

Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite.
Par exemple, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{x} > 0$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 \geqslant 0$.

Ce résultat s'étend aussi au cas des limites infinies

Si pour tout x voisin de α, $f(x) \leqslant g(x)$

- si $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = +\infty$.
- si $\lim\limits_{x \to \alpha} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = -\infty$.

Propriété 7 ***(Théorème d'encadrement (des gendarmes))***

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f, g, h trois fonctions définies au voisinage de α, et soit ℓ un réel. On suppose que pour tout x voisin de α,

$$f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x),$$

et que f et h admettent la même limite ℓ en α.
Alors g admet également pour limite ℓ en α.

Preuve : On fait la démonstration pour le cas $\alpha = +\infty$. Soit $D = D_f \cap D_g \cap D_h$.
Par hypothèse, il existe un réel $A > 0$ tel que, pour tout $x \in D$,

$$x \geqslant A \Longrightarrow f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x).$$

Les fonctions f et h ont pour limite ℓ en α.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe donc des réels B et $B' > 0$ tels que, pour tout $x \in D$,

$$x \geqslant B \Longrightarrow |\, f(x) - \ell \,| \leqslant \varepsilon \text{ et } x \geqslant B' \Longrightarrow |\, h(x) - \ell \,| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $x \geqslant \max(A, B, B')$, on a donc $\ell - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x) \leqslant \ell + \varepsilon$.
On peut reformuler en :

$$\forall x \in D, \quad x \geqslant \max(A, B, B') \Longrightarrow |\, g(x) - \ell \,| \leqslant \varepsilon.$$

Donc g admet pour limite ℓ en α. □

Ce théorème fournit **l'existence et la valeur** de la limite.

Propriété 8 ***(Cas particulier)***

En particulier, $\lim\limits_{x\to\alpha} |\, f \,| = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to\alpha} f = 0$.

Propriété 9

Soit α un réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions définies au voisinage de α. Si f est une fonction bornée au voisinage de α et si $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$, alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0$.

Preuve : La fonction f est bornée au voisinage de α, il existe donc des réels m et M tels que pour x au voisinage de α,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M.$$

Par produit avec $g(x)$ (dont on ne connaît pas le signe), $(fg)(x)$ est compris entre $mg(x)$ et $Mg(x)$, qui convergent tous les deux vers 0 en α. Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors $\lim\limits_{x\to\alpha} (fg)(x) = 0$. □

<u>Exemple</u> n° 3 Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{\cos(x)}{x}$. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} f$.

On sait que $x \to \cos(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$ (par -1 et 1), et que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ d'après le résultat précédent.

Prolongement par continuité en x_0

Définition 11 ***(Prolongement par continuité)***

Soit x_0 un réel et f une fonction définie au voisinage de x_0, mais pas en x_0.
Si f admet une limite réelle ℓ en x_0, alors on dit que f est prolongeable par continuité en x_0.

La fonction g, définie par : $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \in D_f \\ \ell \text{ si } x = x_0 \end{cases}$
est appelée prolongement par continuité de f en x_0.

Exemple n° 4 MQ la fonction $f : x \to \frac{\sin(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 .

f est définie sur $\mathbb{R}^*$ mais pas en 0.
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0}$. On reconnaît un taux d'accroissement et, par définition de la dérivée :
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x) - \sin(0)}{x - 0} = \sin'(0) = \cos(0) = 1 \in \mathbb{R}$, f est prolongeable par continuité en 0. Son prolongement par continuité est la fonction g définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^* \\ g(0) = 1 \end{cases}$$

Remarque : g est continue sur $\mathbb{R}$

La bonne manière de définir le prolongement par continuité d'une fonction telle que la précédente est :

```
def f(x) :
    if abs(x) >= 10**(-16)  :
        y = math.sin(x)/x
    else  :
        y = 1
    return y
```

le plus petit flottant géré par Python est $2,220\,446\,049\,25.10^{-16}$. On peut l'obtenir avec la commande `np.finfo(float).eps` (« eps » comme *epsilon*)

Limites et suites

Propriété 10 ***(Application des limites aux suites)***

Soit α et ℓ des réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$.
f une fonction définie au voisinage de α.

Si f admet pour limite ℓ en α,
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels de D_f qui converge vers α,

alors la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Preuve :

On fait la démonstration pour le cas $\alpha = -\infty$ et $\ell \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{-\infty} f = \ell$, il existe un réel $B < 0$ tel que pour tout $x \in D_f$,

$$x \leqslant B \Longrightarrow |\, f(x) - \ell \,| \leqslant \varepsilon.$$

Puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant B$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in D_f$, on a pour tout $n \geqslant n_0$ que $|\, f(u_n) - \ell \,| \leqslant \varepsilon$.
Cela signifie que la suite $\left(f(u_n)\right)_n$ converge vers ℓ. □

Exemple n° 5 Comme la fonction sinus est continue en 0 et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, on a

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \sin(0) = 0.$$

Propriété 11 ***(Petit théorème du point fixe)***

Soit
- f une fonction définie sur un intervalle I et continue en $\ell \in I$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
- telle que u converge vers ℓ

alors $\ell = f(\ell)$ (on dit alors que ℓ est un point fixe de f).

Preuve :

Par le résultat précédent, comme u converge vers ℓ et f est continue en $\ell \in I$,
$f(u_n)$ converge vers $f(\ell)$.
Il suffit alors de passer à la limite dans la relation $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$
pour obtenir $\ell = f(\ell)$. □

En pratique, on sait souvent que f est continue sur I, donc en ℓ.

Exemple n° 6 On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$.
Peut-elle converger ?

On suppose que la suite u converge vers un réel ℓ.
La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$, donc en ℓ, et on a :

$$\ell = \sqrt{1 + \ell^2} \Rightarrow \ell^2 = 1 + \ell^2 \Rightarrow 0 = 1.$$

C'est absurde la suite diverge.

Limite d'une fonction composée

Propriété 12 ***(Limite d'une fonction composée)***

Soit α , ℓ_1 et ℓ_2 des réel, ou $+\infty$, ou $-\infty$. Soit f et g deux fonctions telles que f est définie au voisinage de α et g est définie au voisinage de ℓ_1. Alors :

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \ell_1 \text{ et } \lim_{x\to\ell_1} g(x) = \ell_2 \Longrightarrow \lim_{x\to\alpha} g\circ f(x) = \ell_2.$$

limites des fonctions de référence.

Il faut connaître par cœur les limites des fonctions de référence aux bornes de leurs domaines de définition

Graphes des fonctions de référence avec leurs limites

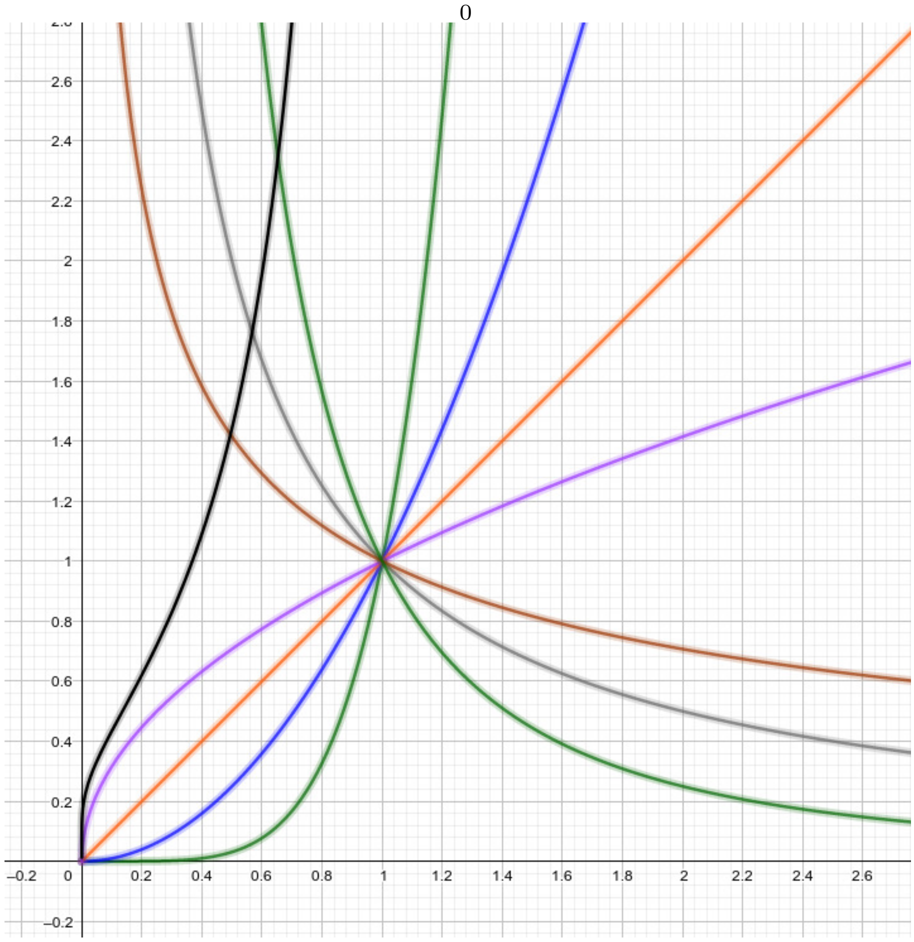
Formes indéterminées classiques.

au voisinage de $+\infty$:

$$0 << \mathrm{e}^{-x} << \underset{(n>1)}{\frac{1}{x^n}} << \frac{1}{x} << \frac{1}{\ln x} << cte << \ln(x) << \sqrt{x} << x << x^2 << \underset{(n>2)}{x^n} << \underset{(1<a<e)}{a^x} << \mathrm{e}^x << \underset{(a>e)}{a^x}$$

au voisinage de 0 :

$$\underset{(n>2)}{x^n} << x^2 << x << \sqrt{x} << \underset{0}{\underset{\downarrow_0}{\frac{1}{|\ln x|}}} << 1 << \frac{1}{\sqrt{x}} << \frac{1}{x} << \underset{n>1}{\frac{1}{x^n}}$$



Formes indéterminées se ramenant à un taux d'accroissement.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos 0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^0}{x - 0} = \mathrm{e}^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

Nous verrons plus tard d'autres outils pour gérer ces formes indéterminées, mais il peut être utilie de les connaître sous cette forme dès maintenant.

Théorème de la limite monotone

Propriété 13 ***(Théorème de la limite monotone, cas croissant)***

Soit a et b des réels tels que $a < b$, et f une fonction monotone définie sur l'intervalle $]a, b[$. Alors pour tout point x_0 de $]a, b[$, f admet une limite à gauche et à droite en x_0, et ces limites sont finies. En particulier :

- Si f est croissante sur $]a, b[$ alors $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \sup\limits_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a,b[\,, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- Si f est croissante sur $]a, b[$ alors $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \inf\limits_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a,b[\,, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ce résultat reste vrai si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.

Preuve : On va montrer le résultat en b^-, les autres cas se montrent de la même façon. Soit l'ensemble

$$A = f(]a, b[).$$

- Si f est majorée, l'ensemble A est non vide et majoré, et donc (théorème de la borne supérieure) possède une borne supérieure réelle M.
- Si f n'est pas majorée, on pose $M = +\infty$.

Pour montrer que la limite de f en b est bien M, il suffit (que b soit fini ou non) de démontrer que pour tout $m < M$, il existe $x_m \in]a, b[$ tel que

$$\forall x \in [x_m, b[, \quad f(x) \in]m, M].$$

Soit un réel $m < M$. Par définition de M (le plus petit majorant de A dans $\mathbb{R}$ ou $+\infty$), le réel m n'est pas un majorant de A. On peut donc trouver un réel $x_m \in]a, b[$ tel que $f(x_m) > m$. La croissance de f sur $]a, b[$ et la définition de M donnent alors :

$$\forall x \in [x_m, b[, \quad m < f(x_m) \leqslant f(x) \leqslant M,$$

ce qui termine la preuve. □

On obtient de même le comportement quand f est décroissante sur $]a, b[$:

- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \inf_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est minorée sur }]a,b[\,, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existe et est égale à

$$\begin{cases} \sup_{]a,b[} f & \text{si } f \text{ est majorée sur }]a,b[\,, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Fonctions continues sur un intervalle

Définition 12 ***(Fonction continue sur un intervalle)***

Soit f une fonction définie sur un ensemble E, et I un intervalle inclus dans E. On dit que f est **continue sur l'intervalle** I lorsque f est continue en tout point de l'intervalle I.

Exemple n° 7 Parmi les fonctions classiques,

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$,
- La fonction $\ln$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La fonction $\exp$ est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exemple n° 8 La fonction "valeur absolue" est continue sur $\mathbb{R}$.

La fonction est égale à une fonction polynômiale sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$, elle est donc continue sur ces intervalles. Reste à étudier la continuité en 0 :

$$\lim_{x\to 0+} |\,x\,| = \lim_{x\to 0-} |\,x\,| = 0.$$

La fonction est donc continue en 0, et donc sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Opérations algébriques et composition

Propriété 14 ***(Composition de fonctions continues)***

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et g une fonction continue sur un intervalle J contenant $f(I)$. Alors $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Propriété 15 ***(Opérations sur les fonctions continues)***

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, qui s'écrit comme la somme, le produit ou le quotient (si le dénominateur ne s'annule pas) de fonctions continues sur I. Alors f est continue sur I.

Définition 13 ***(Prolongement par continuité)***

Soit x_0 un réel, I un intervalle ouvert contenant x_0 et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. On suppose que f est continue en tout point de $I \setminus \{x_0\}$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

On définit sur I la fonction $\tilde{f}$ par :

$$\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = \ell \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0 et sur I tout entier, et est appelée le **prolongement par continuité** de f en x_0.

Fonctions continues par morceaux

Définition 14 ***(Fonction continue par morceaux)***

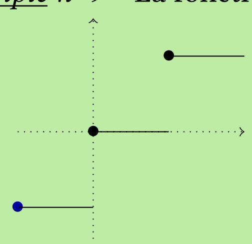
Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Une fonction f est continue par morceaux sur le segment $[a, b]$ lorsqu'il existe une subdivision

$$a_0 = a < a_1 < \ldots < a_n = b$$

telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$ sont continues et admettent un prolongement continu sur $[a_i, a_{i+1}]$

Cela signifie concrètement que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$, f admet une limite finie à gauche en a_{i+1} et une limite finie à droite en a_i.

Exemple n° 9 La fonction partie entière est continue par morceaux sur $[-1, 2]$.



Principaux théorèmes

Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété 16 ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, et f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $y = f(c)$.

Le réel c n'est *a priori* pas unique !

On utilise souvent le TVI pour prouver qu'une fonction s'annule. Dans ce cas, on peut reformuler l'hypothèse 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ en $f(a)f(b) \leqslant 0$ alors le résultat reste vrai avec $c \in [a, b]$.

Exemple n° 10 voir **Exercice n° 10**

Ce théorème signifie que si f est continue sur un intervalle I et y prend deux valeurs distinctes, elle atteint toutes les valeurs (intermédiaires...) comprises entre ces deux réels.
Aussi, le théorème des valeurs intermédiaires est souvent rédigé sous la forme :

l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Propriété 17 ***(Théorème des bornes atteintes)*** THÉORÈME DES BORNES ATTEINTES

Soit a et b deux réels tels que $a < b$
f une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Alors f est bornée et atteint ses bornes.

On peut aussi dire que « admet un maximum et un minimum sur $[a, b]$. »
Cela signifie également que $m = \min\limits_{[a,b]} f$ et $M = \max\limits_{[a,b]} f$ existent et que

$$f([a, b]) = [m, M].$$

Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.

Propriété 18 ***(Théorème de la bijection)*** THÉORÈME DE LA BIJECTION

Soit f une fonction définie, continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Alors f réalise une bijection de I dans l'intervalle $f(I)$.
Sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même sens de variation que f.

Preuve : *(démonstration à connaître, sauf pour la continuité de f^{-1})*

- – f est continue sur I, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires $f(I)$ est un intervalle.
  – f est surjective de I dans $f(I)$ par définition de $f(I)$.
  – f est strictement monotone sur I, donc deux points différents ne peuvent pas avoir la même image par f. Donc f est injective sur I.

  Donc f est bijective de I dans l'intervalle $f(I)$.
  Pour la suite, on suppose que f est strictement croissante sur I
  (le cas décroissant se traite de la même manière).

- Soit a et b deux éléments de $f(I)$. Supposons que $f^{-1}(a) \geqslant f^{-1}(b)$.
  En composant par f, on trouve $a \geqslant b$. On a prouvé : $f^{-1}(a) \geqslant f^{-1}(b) \Longrightarrow a \geqslant b$
  Par passage à la contraposée, on vient de montrer que $a < b \Longrightarrow f^{-1}(a) < f^{-1}(b)$.
  Ceci étant vrai pour tout $(a, b) \in f(I)^2$, on a prouvé que f^{-1} est strictement croissante sur $f(I)$.

- Montrons maintenant que f^{-1} est continue sur $f(I)$.
  Soit $y_0 \in f(I)$, qui s'écrit $y_0 = f(x_0)$ avec $x_0 \in I$.
  On suppose que x_0 n'est pas une borne de I. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset I$.
  On pose $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$.
  y_1 et y_2 sont dans $f(I)$ et vérifient $y_1 < y_0 < y_2$ par croissance de f.
  On pose $\eta = \min(y_0 - y_1, y_2 - y_0)$. On a alors :

  $$|y - y_0| < \eta \Longrightarrow y_1 < y < y_2 \Longrightarrow x_0 - \varepsilon \leqslant f^{-1}(y) \leqslant x_0 + \varepsilon \quad \text{par croissance de } f^{-1} \text{ sur } f(I).$$

  Donc $\lim\limits_{y \to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0)$. Donc f^{-1} est continue en y_0.
  Le cas où x_0 est une borne se traite de la même manière en ajustant les intervalles. □

En particulier, si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I, et si $b \in f(I)$, alors l'équation $f(x) = b$ admet une unique solution sur I.

Exemple n° 11 Montrer que l'équation $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ possède une unique solution dans l'intervalle $]2, +\infty[$.

On pose $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ sur $]2, +\infty[$.
C'est une fonction polynomiale donc dérivable sur $]2, +\infty[$, et

$$\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x+2) > 0.$$

Donc f est strictement croissante sur $]2, +\infty[$.

f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]2, +\infty[$, donc par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $]2, +\infty[$ vers $f(]2, +\infty[)$.
Or $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = -3$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, donc $f(]2, +\infty[) =]-3, +\infty[$.
Comme $0 \in]-3, +\infty[$, il possède un unique antécédent par f, et donc
$\boxed{\text{l'équation } x^3 - 3x^2 + 1 = 0 \text{ possède une unique solution dans l'intervalle }]2, +\infty[.}$

Propriété 19

Soit f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J
Les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Exemple n° 12 Cas des fonctions exponentielle et logarithme :

Exercices

exercice 1 Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1} - x - 1}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x^2 + |x|}{2x^2 - |x|}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{4x^2 - 16}{x^3 - 8}$
4. $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x-2}{\sqrt{x-2}}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\lfloor x \rfloor}{\pi x}$

Proposition de corrigé :

exercice 2

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2\lfloor x \rfloor - x$. Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[-2; 2]$.
Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition
2. On définit g sur $\mathbb{R}^*$ par : pour tout $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
Déterminer les limites de g aux bornes de son domaine de définition.

Proposition de corrigé :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière,

$$\begin{array}{rrcl} & x - 1 < & \lfloor x \rfloor & \leqslant x \\ \text{donc} & 2x - 2 < & 2\lfloor x \rfloor & \leqslant 2x \\ \text{puis} & x - 2 < & 2\lfloor x \rfloor - x & \leqslant x \end{array}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x + 2 = -\infty$ donc d'après le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

2. D'après l'encadrement précédent, pour tout réel $x > 0$, $1 - \frac{2}{x} \leqslant g(x) < 1$

   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{2}{x} = 1$, le théorème des gendarmes assure $\boxed{\lim\limits_{+\infty} g = 1}$

   $\forall x \in]0;1[\,,\, f(x) = -x$ et $g(x) = -1 \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1$ donc $\boxed{\lim\limits_{0^+} g = -1}$

   Pour tout réel $x < 0$, $1 - \frac{2}{x} \geqslant g(x) > 1$ (on divise par un nombre négatif !)

   Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} 1 - \dfrac{2}{x} = 1$, le théorème des gendarmes assure $\boxed{\lim\limits_{-\infty} g = 1}$

   Comme $\lim\limits_{x \to 0^-} 1 - \dfrac{2}{x} = +\infty$, le théorème de comparaison donne $\boxed{\lim\limits_{0^-} g = +\infty}$

exercice 3

1. Donner un exemple de fonction n'admettant pas de limite en 0 (même infinie).
   Par exemple : $x \mapsto \frac{1}{x}\sin x$ ou $x \mapsto \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$
2. Donner un exemple de fonction n'admettant pas de limite en $+\infty$ (même infinie).
   Par exemple : $x \mapsto \sin x$

Proposition de corrigé :

exercice 4 Soit w la suite définie par $\begin{cases} w_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = \sqrt{12 + w_n} \end{cases}$

exercice 5 Les fonctions suivantes sont-elles prolongeables par continuité ?

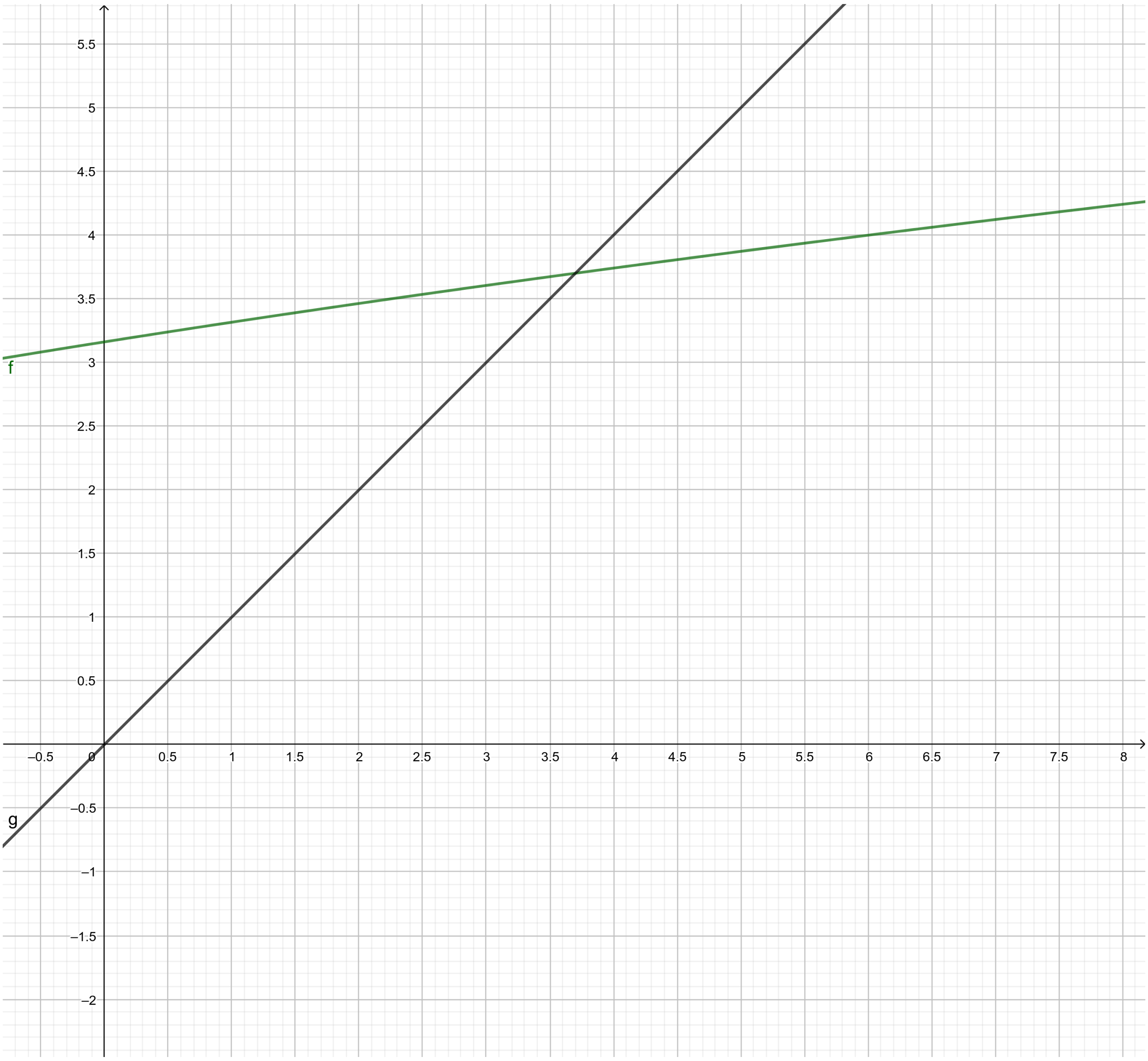
- $f : x \mapsto x^x$ définie sur $]0; +\infty[$
- $g : x \mapsto \left(\mathrm{e}^{2x} + x\right)^{\frac{1}{x}}$ définie sur $]0; +\infty[$
- $h : x \mapsto (1 - x^2) \ln \dfrac{1+x}{1-x}$ définie sur $]-1; 1[$

exercice 6 Étudier la continuité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x \cos \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Proposition de corrigé :La question a a été rajoutée, il est utile de se poser ce genre de questions par soi même, et surtout de regarder l'ensemble des questions
Ici, on peut traiter les questions b et c dans une même récurrence.

a. Utiliser le graphe ci-dessous, dans lequel la fonction $x \mapsto \sqrt{12+x}$ a été représentée, pour construire les premiers termes de la suite. Quelle(s) conjectures peut-on émettre ?
b. Prouver que la suite est bien définie, et que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $w_n < 4$.
c. Déterminer le sens de variation de la suite w.
d. La suite w est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?



exercice 7 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $e^{u_{n+1}} - e^{u_n}$ en fonction de u_n.
3. En déduire le comportement à l'infini de la suite $\left(e^{u_{n+1}} - e^{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition de corrigé :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \mathrm{e}^{-u_n} > 0$ donc (u_n) est croissante. Par l'absurde, supposons qu'elle converge vers un réel ℓ. Par continuité de $x \mapsto x + \mathrm{e}^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, on aurait $\ell = \ell + \mathrm{e}^{\ell}$ c'est à dire $\mathrm{e}^{\ell} = 0$ ce qui est absurde car une exponentielle est toujours strictement positive.

   $$\boxed{(u_n) \text{ diverge vers } +\infty}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$
   $\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} = \exp\left(u_n + \mathrm{e}^{-u_n}\right) - \mathrm{e}^{u_n}$

3. D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

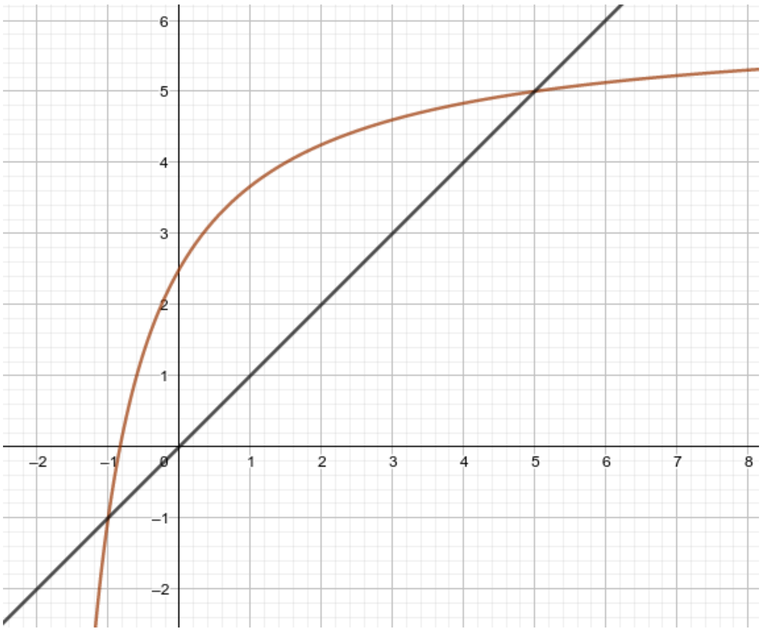
   $\mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{u_n} \exp\left(\mathrm{e}^{-u_n}\right) - \mathrm{e}^{u_n} = \dfrac{\exp\left(\mathrm{e}^{-u_n}\right) - 1}{\mathrm{e}^{-u_n}}$

   Or, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{-u_n} = 0$ car $u_n \to +\infty$

   Ainsi, par composition de limites, $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{e}^{u_{n+1}} - \mathrm{e}^{u_n} = 1$

exercice 8 Soite u la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 5}{u_n + 2}$

1. Prouver que la suite est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0; +\infty[$
2. Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{6x+5}{x+2}$.
3. En utilisant la courbe ci-dessous, placer les réels u_0, u_1 et u_2 puis conjecturer le sens de variation de la suite u. Prouver la conjecture.



4. La suite est-elle bornée ? convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

Proposition de corrigé :

Proposition de corrigé :

exercice 9
Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$ et périodique de période $T > 0$.
Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Proposition de corrigé :
Soit T une période de f. f est continue sur $[0; T]$, donc est bornée.
Il existe ainsi un réel $M > 0$ tel que $\forall x \in [0; T], |f(x)| < M$.

Or, $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [0 + kT; T + kT] = \mathbb{R}$
Ainsi, pour tout réel x, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [0 + kT; T + kT]$
Alors, $x - kT \in [0; T]$ et $|f(x)| = |f(x - kT)| < M$ par T-périodicité de f et
$\boxed{f \text{ est bornée sur } \mathbb{R}}$.

exercice 10 Montrer que toute fonction polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Proposition de corrigé :On note f la fonction polynôme, et αx^p son terme de plus haut degré, avec p impair. On va traiter le cas $\alpha > 0$, le cas $\alpha < 0$ se traite similairement.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. Donc il existe $a \in \mathbb{R}_-^*$ tel que $f(a) < 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Donc il existe $b \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(b) > 0$.

Donc $a < b$ et $f(a)f(b) < 0$. Or la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a, b]$ (car c'est une fonction polynôme). Le théorème des valeurs intermédiaires nous donne donc l'existence de $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$, c'est-à-dire tel que c est racine de f. D'où le résultat.

exercice 11 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{2x} + 1$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I à déterminer.
2. Expliciter l'expression de la bijection réciproque f^{-1}.

Proposition de corrigé :

1. f est strictement croissante, comme composée de fonctions strictement croissantes (on pourrait aussi dériver). De plus f est continue sur $\mathbb{R}$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})\ =]1;+\infty[$. En effet, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
   $\boxed{f \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur }]1;+\infty[}$.
2.

$$\begin{aligned}\forall y \in]0;+\infty[\qquad f(x) = y &\iff \mathrm{e}^{2x} + 1 = y \\ &\iff \mathrm{e}^{2x} = y - 1 \\ &\iff 2x = \ln(y-1) \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln(y-1)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall y > 1, f^{-1}(y) = \tfrac{1}{2}\ln(y-1)}$$

exercice 12

Déterminer les intervalles I et J les plus grands possibles tels que $f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de I sur J.
Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ en fonction de x.

Proposition de corrigé :
Commençons par remarquer que f est impaire et, pour tout réel x, $f(x)$ est du signe de x.
En étudiant la dérivée, ou en remarquant que $\forall x \geqslant 0, f(x) = \frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x} = 1 - \frac{1}{1+x}$,
f est croissante et continue sur $[0; +\infty[$ et réalise donc une bijection de $[0; +\infty[$ sur $f([0; +\infty[) = [0; 1[$. En effet, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty[} f(x) = 1$.

Par imparité de f, f réalise également une bijection de $]-\infty; 0[$ vers $]-1; 0[$.

Soit $y \in [0; 1[$. Il existe un unique antécédent $x \geqslant 0$ vérifiant :
$f(x) = y \iff x = y(1 + |x|) \underset{x>0}{\iff} x = y + xy \iff x(1-y) = y \iff x = \frac{y}{1-y}$

De même, soit $y \in]-1; 0[$. Il existe un unique antécédent $x \geqslant 0$ vérifiant :
$f(x) = y \iff x = \frac{y}{1+y}$ (car alors $x < 0$)

Finalement $\boxed{f \text{ réalise une bijection de }]-\infty; +\infty[\text{ sur }]-1; 1[\text{ et } \forall y \in]-1; 1[, f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}}$

exercice 13

Soit f une fonction continue de $[0; 1]$ dans $[0; 1]$.
Montrer que f admet un point fixe.

Proposition de corrigé :
Soit $g : \begin{array}{ccc} [0;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$
$g(0) = f(0) \geqslant 0$ et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ car $f(1) \in [0; 1]$

f étant continue, g est continue comme somme de fonctions continues et le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $c \in [0; 1]$ tel que $g(c) = 0$. On a alors $f(c) = c$.
$\boxed{f \text{ admet un point fixe}}$.

---

exercice 14 Soit $p \in]0;1[$ et $q = 1 - p$.

Montrer que l'équation $x^2 - qx - pq = 0$ d'inconnue x admet deux solutions r et s réelles distinctes vérifiant : $-1 < r < 0 < s < 1$

Proposition de corrigé :

Notons $f : x \mapsto x^2 - qx - pq$.

Alors $\left| \begin{array}{l} f(-1) = 1 + q - pq = 1 + q(1-p) = 1 + q^2 > 0. \\ f(0) = -pq < 0. \end{array} \right.$

f est continue, car polynômiale et le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence de $r \in]-1;0[$ tel que $f(r) = 0$.

De même, $f(1) = 1 - q - pq = p - pq = p(1-q) = p^2 > 0$
donc il existe $s \in]0;1[$ tel que $f(s) = 0$

Enfin, $x \mapsto x^2 - qx - pq$ étant polynômiale de degré deux, elle s'annule au plus deux fois. Comme d'après ce qui précède elle admet au moins deux racines, alors elle en admet exactement deux.

$\boxed{\text{l'équation admet exactement deux solutions réelles } r \text{ et } s \text{ vérifiant } -1 < r < 0 < s < 1}$

---

exercice 15 ♥

Prouver que , pour tout réels x, y, on a

$$\max(x;y) = \frac{x + y + |x-y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x;y) = \frac{x + y - |x-y|}{2}$$

En déduire que, si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors $\min(f;g)$ et $\max(f;g)$ sont aussi des fonctions continues sur I.

Proposition de corrigé :

Soit $(x;y) \in \mathbb{R}^2$.

- Si $x \geqslant y$,
alors $x - y \geqslant 0$ donc $|x-y| = x - y$ et $\frac{1}{2}(x + y + |x-y|) = \frac{1}{2}(x + y + x - y) = x = \max(x;y)$
de même, $\frac{1}{2}(x + y - |x-y|) = \frac{1}{2}(x + y - x + y) = y = \min(x;y)$

- Si $x < y$,
alors $x - y < 0$ donc $|x-y| = y - x$ et $\frac{1}{2}(x + y + |x-y|) = \frac{1}{2}(x + y + y - x) = y = \max(x;y)$
de même, $\frac{1}{2}(x + y - |x-y|) = \frac{1}{2}(x + y - y + x) = x = \min(x;y)$

$\boxed{\text{pour tout } (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad \max(x;y) = \frac{x + y + |x+y|}{2} \quad \text{et } \min(x;y) = \frac{x + y - |x-y|}{2}}$

Par continuité de la fonction valeur absolue,
$\boxed{\text{les fonction } \max(f;g) \text{ et } \min(f,g) \text{ sont continues}}$
comme somme et composées de fonctions continues.

---

exercice 16 Montrer que $f : x \mapsto \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur un intervalle à préciser. Donner l'expression de sa bijection réciproque.

Proposition de corrigé :
f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = e^{-x}(e^{2x}-1)$$

En particulier, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$ car $e^{2x} > 1$ et $e^{-x} > 0$.
Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. $f(0) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Comme de plus f est continue (car dérivable) et strictement croissante donc $\boxed{\text{la restriction } \tilde{f} \text{ de } f \text{ à }]0;+\infty[\text{ réalise une bijection de }]0;}$

on aurait aussi pu définir f sur $]0;+\infty[$. f (et pas seulement sa restriction) aurait alors été bijective.

Soit $y \in]1;+\infty[$.

Notons $(\mathcal{E})$ l'équation $\tilde{f}(x) = y$ d'inconnue $x > 0$. Pour $x > 0$,
$$(\mathcal{E}) \iff e^x + e^{-x} = 2y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$

En posant $X = e^x$, l'équation équivant à $X^2 - 2yX + 1 = 0$
Le discriminant du trinôme est
$$\Delta = (-2y)^2 + 4\times 1\times(-1) = 4y^2 - 4 = 4(y^2-1) > 0 \text{ car } y > 1.$$
Il y a donc deux racines réelles distinctes : $X_1 = \frac{2y-\sqrt{\Delta}}{2} = y - \sqrt{y^2-1}$ et $X_2 = y + \sqrt{y^2-1}$
Alors $(\mathcal{E}) \iff e^x = y - \sqrt{y^2-1}$ ou $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$.
Comme $X_2 > X_1 > 0$, (*ce point est important à vérifier, car si l'un des deux était <0, on pouvait éliminer la racine*))
$$(\mathcal{E}) \iff x = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) \text{ ou } x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$$

Montrons que $\ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) < 0$.
$y > 1$ donc $-2y < -2$ puis $y^2 - 2y + 1 < y^2 - 1$ donc $0 \leqslant (y-1)^2 < y^2 - 1$ puis $y - 1 < \sqrt{y^2-1}$ par stricte croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$ et enfin $y - \sqrt{y^2-1} < 1$.
Finalement, $\ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right) < 0$.
pour penser à cela, on résout <u>au brouillon</u> l'inéquation $y - \sqrt{y^2-1} < 1$, et on se rend compte qu'elle équivaut à $y > 1$. Il n'y a plus qu'à recopier les étapes dans un ordre constructif. Le point de départ $y > 1$ est de toutes façons imposé par l'espace d'arrivée $]1;+\infty[$.

L'unique solution strictement positive de $\mathcal{E}$ est donc $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)$ dans $]0;+\infty[$

$$\boxed{\forall y \in]-1;1[, \quad , \tilde{f}^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right)}$$

exercice 17 ($\star$)

Soit f une fonction continue en 0. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$$

Prouver que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Proposition de corrigé :

Méthodo : *Quelques questions à se poser pour la recherche :*
- *pourquoi 0 ?*
- *Comment se ramener à 0 ?*
- *qu'est ce que ça veut dire « f est constante ? » (comment on le prouverait)'*
- *faire des essais, « tester », itérer la formule*
- *...*

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$

$\boxed{\text{I}}$ Pour $n = 0$, on a : $f(x) = f\left(\frac{x}{2^0}\right)$

$\boxed{\text{H}}$ Supposons que l'on ait, pour un certain entier $n \geqslant 0$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right)$
Alors la propriété de f appliquée à l'hypothèse de récurrence donne :
$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2^n}}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$ d'où l'hérédité

$\boxed{\text{C}}$ $\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = \frac{x}{2^n}$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x}{2^n} = 0$ donc, par continuité de f en 0, $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = f(0)$

Mais la suite $\left(f(\frac{x}{2^n})\right)_n$ est constante égale à $f(x)$. Donc $f(x) = f(0)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f \text{ est constante}}$

exercice 18 Soit $f : x \mapsto \frac{x-2}{x-3}$.

- Déterminer le domaine de définition D de f.
- Dresser le tableau de variations de f, en précisant les limites aux bornes de D.
- Montrer que f réalise une bijection de D sur un ensemble D' à préciser.
- Expliciter la bijection réciproque de f.

Proposition de corrigé :

- $f(x)$ est définie ssi $x - 3 \neq 0$ donc ssi $x \neq 3$.
  Ainsi, f est définie sur $\boxed{D =]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[}$

- f est dérivable sur D comme quotient de fonctions affines, le dénominateur ne s'annulant pas. Pour tout réel x, on a :
  $$\forall x \in D, f'(x) = \frac{1(x-3) - 1(x-2)}{(x-3)^2} = \frac{-1}{(x-3)^2} < 0.$$
  On obtient donc le tableau de variations :

  En effet, pour tout $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{1 - \frac{2}{x}}{1 - \frac{3}{x}}$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.

> *remarque : ici, la dernière question permet en fait de répondre à celle-ci !*
> *Nous allons quand même rédiger avec le théorème de la bijection continue pour avoir un exemple supplémentaire.*

- f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]3; +\infty[$ donc sa restriction à $]3; +\infty[$ réalise une bijection de $]3 : +\infty[$ sur $f(]3 : +\infty[) =]1; +\infty[$.
  De même, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]-\infty; 3[$ donc sa restriction à $]-\infty; 3[$ réalise une bijection de $]-\infty; 3[$ sur $f(-\infty; 3[) =]-\infty; 1[$.

  Comme $]-\infty; 1[\cap]1; +\infty[= \varnothing$,
  (*il est important de vérifier que les images ne se « recoupent » pas. Par exemple, la restriction de $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ à $\mathbb{R}_-$ est bijective, de même que la restriction à $\mathbb{R}_+$, mais la fonction n'est pas bijective.*)
  $$\boxed{f \text{ réalise une bijection de } D \text{ sur } \mathbb{R}\backslash\{1\}}$$.

se rappeler l'inconnue et que y est un nombre

- Soit $y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. Alors
  $f(x) = y \iff \frac{x-2}{x-3} = y \iff x - 2 = xy - 3y \iff x(1-y) = 2 - 3y \iff x \underset{y\neq 1}{=} \frac{2-3y}{1-y}$
  L'équation admet une unique solution (*ce qui prouve la bijectivité de f !*) et :
  $$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}\backslash\{1\}, \quad f^{-1}(y) = \frac{2-3y}{1-y}}$$

exercice 19 ($\star$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et telle que $\lim\limits_{-\infty} f = \lim\limits_{+\infty} f = +\infty$
Montrer que f admet un minimum global.

Proposition de corrigé :
$\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ donc il existe $B > 0$ tel que, pour tout $x > B$, $f(x) > f(0)$
$\lim\limits_{-\infty} = +\infty$ donc il existe $A < 0$ tel que, pour tout $x > B$, $f(x) > f(0)$

f est continue sur $[A; B]$ donc admet un minimum sur $[A; B]$ qu'elle atteint en un réel x_0.
Pour tout $x \in [A; B]$, $f(x) \geqslant f(x_0)$. En particulier $0 \in [A; B]$ et $f(0) \geqslant f(x_0)$
Pour tout $x \notin [A; B]$, $f(x) > f(0) \geqslant f(x_0)$

Finalement, pour tout réel x, $f(x) \geqslant f(x_0)$ et $\boxed{f \text{ admet un minimum global}}$

exercice 20 ♥
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continue et telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$.
On considère la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty$

Proposition de corrigé :
Par hypothèse, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ donc, pour $x = u_n$, on trouve $u_{n+1} > u_n$.
Ainsi, (u_n) est strictement croissante.

Montrons par l'absurde que (u_n) n'est pas majorée. Supposons la majorée.
Alors (u_n) converge d'après le théorème de la limite monotone vers une limite ℓ.
Par continuité de f sur $\mathbb{R}$, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
Cette dernière assertion contredit l'hypothèse « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x$ ».

Finalement (u_n) n'est pas majorée.
(u_n) est donc croissante et non majorée d'où $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = +\infty}$

exercice 21 ($\star$) Soit f définie sur $]1;+\infty[$ définie par $f : x \longrightarrow \dfrac{x}{\ln(x)}$

1. a. Étudier les variations de f.
   b. Établir que la restriction $\tilde{f}$ de f à $]1,\mathrm{e}[$ réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera.
   c. Tracer dans un même repère l'allure des graphes de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x = n\ln(x)$ admet une unique solution x_n dans $]1,\mathrm{e}[$
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante.
4. En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

Proposition de corrigé :

1. a. f est dérivable sur $]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle (le dénominateur ne s'annulant pas) et,
$$\forall x > 1, f'(x) = \frac{1\ln x - \frac{1}{x}x}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$
   $f'(x)$ est du signe de $\ln x - 1$ et on obtient le tableau de variations :
   b. Sur $]1,\mathrm{e}[$, f est continue (car dérivable) et strictement décroissante donc la restriction $\tilde{f}$ à I$=]1;\mathrm{e}[$ réalise une bijection de I sur $f(I)$.
   On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\ln x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to \mathrm{e}} \tilde{f} = f(\mathrm{e}) = \mathrm{e}$. Donc $f(I) =]0;\mathrm{e}[$.
   Ainsi, $\boxed{\text{la restriction } \tilde{f} \text{ à I}=]1;\mathrm{e}[\text{ réalise une bijection de }]1;\mathrm{e}[\text{ sur }]0;\mathrm{e}[}$.
   c. Les courbes de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

2. Soit n un entier tel que $n \geqslant 3$, $x = n\ln(x) \iff f(x) = n$.
   Or $n \in]\mathrm{e};\infty[$ donc admet un unique antécédent x_n par f dans $]1,\mathrm{e}[$.
   Ainsi, $\boxed{\text{l'équation admet une unique solution } x_n \text{ dans }]1,\mathrm{e}[}$.

3. Pour tout $n \geqslant 3$, $x_n = \tilde{f}^{-1}(n)$. Or, $\tilde{f}$ étant strictement croissante, sa bijection réciproque $\tilde{f}^{-1}$ est également décroissante, donc $(\tilde{f}(n))_{n\geqslant 3}$ est strictement décroissante, soit $\boxed{\text{la suite } (x_n)_{n\geqslant 3} \text{ est strictement décroissante.}}$.

4. $(x_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante, et minorée par 1 donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 1$ et
   $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}^{-1}(n) = \lim\limits_{+\infty} \tilde{f}^{-1} = 1$.

   Finalement, $\boxed{(x_n) \text{ converge vers } 1}$

exercice 22 ($\star$) ♥ **(EDHEC ECE 2000)**

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive notée u_n
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$
4. a. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante.
   b. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

Proposition de corrigé :

1. f est polynômiale, donc dérivable et, $\forall x > 0, f'(x) = nx^{n-1} + 18x > 0$.
   (on peut aussi remarquer que f est somme de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, donc est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$)

   f est donc strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et réalise donc une bijection de $]0; +\infty[$ sur $]-4; +\infty[$. En effet, $f(0) = -4$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. Comme $0 \in]-4; +\infty[$,
   $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ admet une unique solution strictement positive } u_n}$.
2. $f_1(x) = 0 \iff 9x^2 + x - 4 = 0$.
   Le discriminant de ce trinôme est $\Delta_1 = 1^2 - 4 \times (-4) \times 9 = 145 > 0$.
   Il y a donc deux racines réelles $x_1 = \frac{-1-\sqrt{145}}{18} < 0$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18} > 0$.
   Ainsi, $\boxed{u_1 = \frac{-1+\sqrt{145}}{18}}$

   $f_2(x) = 0 \iff 10x^2 - 4 = 0 \iff x = \pm\frac{2\sqrt{10}}{10}$. Ainsi, $\boxed{u_2 = \frac{2\sqrt{10}}{10}}$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\frac{2}{3}) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\frac{4}{9} - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$. Par croissance de f_n, on en déduit que $u_n < \frac{2}{3}$. Finalement $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[}$
4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $f_n(u_n) = u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0$.
   On en déduit que :
   $f_{n+1}(u_n) = f_{n+1}(u_n) - \underbrace{f_n(u_n)}_{=0} = u_n^{n+1} + 9u_n^2 - 4 - (u_n^n + 9u_n^2 - 4) = u_n^n(u_n - 1) < 0$ car $u_n \in]0; \frac{2}{3}[$
   Par stricte croissance de f_{n+1}, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$
   et donc $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est strictement croissante}}$.
   b. Finalement, la suite (u_n) est croissante et majorée par $\frac{2}{3}$ donc converge vers une limite $\ell \in]0; \frac{2}{3}]$. On sait que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(u_n) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(u_n) = 0$
   De plus, comme $|u_n| < \frac{2}{3}$, on a par croissance de $x \mapsto x^n$, $|u_n^n| < \left(\frac{2}{3}\right)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
   $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n)^n = 0$ et, par somme de limites et par continuité de $x \mapsto 9x^2 - 4$, on trouve
   $\lim\limits_{n\to\infty} u_n^n + 9u_n^2 - 4 = 0 + 9\ell^2 - 4 = 9\ell^2 - 4$. Comme $\lim f_n(u_n) = 0$, on trouve, par unicité de la limite $9\ell^2 - 4 = 0$ puis $\ell = \frac{2}{3}$ car $\ell > 0$.

   $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } \frac{2}{3}}$

exercice 23 **(EDHEC ECS 2017)**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1. On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0, 1]\ ,\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} x^k$$

1. a. Compléter la fonction `Scilab` suivante pour qu'elle renvoie la valeur de $f_n(x)$ à l'appel de `f(x,n)` , où x et n sont donnés par l'utilisateur.

```
def f(x,n) :
    y = sum(....................)
    return y
```

b. Transformer, pour $x \neq 1$, l'expression de $f_n(x)$ puis en déduire une deuxième façon de déclarer « f » , en complétant la déclaration suivante où la fonction est toujours nommée « f ».

```
def f(x,n) :
    if x==1 :
        y = ...............
    else :
        y = ................
    return y
```

2. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue $x \in [0,1]$, possède une unique solution α_n dans $[0,1]$.

3. a. Montrer que $f_{n+1}(\alpha_n) \geq 1$ et en déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
   b. En déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente.

4. a. Déterminer α_2 puis vérifier que $0 \leq \alpha_2 \leq 1$.
   b. Utiliser les variations de la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour établir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^{n+1} = 0$.
   c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \dfrac{1}{2}$.

5. On suppose que f_n a été déclarée (cf question 1). On considère les commandes supplémentaires suivantes :

```
n = input('entrer la valeur de n : ')
x = 0
while f(x,n)<1 :
    x = x + 0.001
print(x)
```

Quel est le lien entre le résultat affiché et α_n ?

---

exercice 24 EDHEC ECS 2016

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n.

1. a. Dresser le tableau de variation de f, limites comprises.
   b. Vérifier que chaque terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est parfaitement défini et strictement positif.

2. Les scripts suivants renvoient, pour celui de gauche, la valeur 5, et celui de droite, la valeur 6. Que sait-on de u_5 et u_6 ? Quelle conjecture peut-on émettre sur le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

```
u = 1
n = 0
while u>0.00001 :
    u = np.exp(-u)/u
    n = n+1
print(n)
```

```
u = 1
n = 0
while u<100000 :
    u = np.exp(-u)/u
    n = n+1
print(n)
```

3. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x} - x^2$$

b. En déduire que l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x, possède une seule solution, que l'on notera α, sur $\mathbb{R}_+^*$.
c. Montrer que $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

4. a. Établir les deux inégalités : $u_2 > u_0$ et $u_3 < u_1$.
b. En déduire les variations des suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

5. On pose : $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a. Déterminer $h(x)$ pour tout réel x strictement positif et vérifier que h est continue en 0.
b. Résoudre l'équation $h(x) = x$, d'inconnue x élément de $\mathbb{R}_+$.
c. En déduire la limite de la suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
d. Montrer par l'absurde que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge puis donner $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n}$.

Proposition de corrigé :

1. a. f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$,
$f'(x) = \frac{-xe^{-x} - e^{-x}}{x^2} = \frac{(-x-1)e^{-x}}{x^2} < 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\lim\limits_{x\to0^+} e^{-x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
donc, par produit de limites, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = +\infty$.
Par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} = 0$
b. On a $f(]0;+\infty[) =]0;+\infty[$. $u_0 > 0$ est bien défini. Supposons $u_n > 0$ bien défini pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alros $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et $u_{n+1} > 0$ donc, d'après le principe de récurrence, $\boxed{\text{chaque terme de la suite est bien défini.}}$

2. On peut conjecturer que certains termes peuvent se rapprocher très près de 0, et d'autres prendre des valeurs très grandes. La suite pourrait ne pas être convergente.

3. a. g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$comme somme de fonctions dérivables et :
$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = -e^{-x} - 2x < 0$ donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}_+}$.
b. $f(x) = x \iff \frac{e^{-x}}{x} = x \iff e^{-x} = x^2 \iff g(x) = 0$
Or g est continue, car dérivable et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) =]-\infty;1[$ (détailler les limites)
$0 \in]-\infty;1[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$ et
$\boxed{\text{l'équation } f(x) = x, \text{ d'inconnue } x, \text{ possède une seule solution } \alpha \text{ dans }]0;+\infty[}$
c. $g(1) = e^{-1} - 1 < 0$ donc $g(1) < g(\alpha)$ et, par décroissance de g, $\alpha < 1$.
De même, $g(\frac{1}{e}) = e^{-\frac{1}{e}} - \frac{1}{e^2} = \frac{1}{e^{\frac{1}{e}}} - \frac{1}{e^2} > 0$ car $e^2 > 1 > \frac{1}{e}$.
Donc $g(\frac{1}{e}) > g(\alpha)$ et, par décroissance de g, $\alpha > \frac{1}{e}$.
$\boxed{\frac{1}{e} < \alpha < 1.}$

4. a. $u_0 = 1$, $u_1 = e^{-1}$ et $u_2 = \frac{e^{e^{-1}}}{e^{-1}} = e^{1+e^{-1}} > 1 = u_0$
Comme f est décroissante, on déduit de $u_0 < u_2$ que $f(u_0) > f(u_2)$ soit $u_1 > u_3$
$\boxed{u_2 > u_0 \text{ et } u_3 < u_1.}$
b. Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{H}_n$: « $u_{2n} < u_{2(n+1)}$ et $u_{2n+1} > u_{2(n+1)+1}$ »
D'après ce qui précède, $\mathcal{H}_0$ est vraie.

Supposons $\mathcal{H}_n$ vraie pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. Alors par hypothèse de récurrence $u_{2n+1} > u_{2(n+1)+1}$ et, par décroissance de f, on obtient $f(u_{2n+1}) < f(u_{2(n+1)+1})$ c'est à dire $u_{2(n+1)} < u_{2(n+2)}$. En appliquant à nouveau f, on trouve $f(u_{2(n+1)}) > f(u_{2(n+2)})$ soit $u_{2(n+1)+1} < u_{2(n+2)+1}$ donc $\mathcal{H}_n$ est vraie
D'après le principe de récurrence, $\mathcal{H}_n$ est vraie pour tout n, ce qui prouve que
$\boxed{(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante et } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ décroissante.}}$

5. a. Pour tout $x > 0$, $\quad h(x) = \dfrac{\exp(-\frac{e^{-x}}{x})}{\frac{e^{-x}}{x}} = x\exp\left(x - \dfrac{e^{-x}}{x}\right)$
$\lim\limits_{x\to0^+} e^{-x} = 1$ donc, par quotient de limites, $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty$.
Par somme de limites, $\lim\limits_{x\to0^+} \left(x - \dfrac{e^{-x}}{x}\right) = -\infty$ et, par composition de limites,

$\lim\limits_{x\to 0^+} \exp(x - \frac{e^{-x}}{x}) = 0$ puis par produit de limites,
$\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0)$

$\boxed{h \text{ est continue en } 0.}$

b. $h(x) = x \iff x\left(\exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right)\right) = x \iff x\left(1 - \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right)\right) = 0$
$h(x) = x \iff x = 0$ ou $1 - \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 0$
Si $x > 0$,
$h(x) = x \iff \exp\left(x - \frac{e^{-x}}{x}\right) = 1 \iff x - \frac{e^{-x}}{x} = 0 \iff f(x) = x \iff x = \alpha$

$\boxed{\text{l'équation } h(x) = x \text{ admet deux solutions : } 0 \text{ et } \alpha}$

c. La suite $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite $\ell \geqslant 0$ d'après le TLM.
Comme h est continue sur $\mathbb{R}_+$, et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2(n+1)+1} = h(u_{2n+1}$, la suite converge vers un point fixe de h, c'est à dire 0 ou α. Or, $u_1 = \frac{1}{e} < \alpha$ et la suite (u_{2n+1}) est décroissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < \alpha$ et $\boxed{\text{la suite } (u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge donc vers } 0.}$

d. $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Donc elle diverge vers $+\infty$ ou converge vers un réel ℓ'.
Par l'absurde, supposons qu'elle converge vers $\ell' \in \mathbb{R}_+$. Par continuité de h sur $\mathbb{R}_+$, ℓ' serait un point fixe de h donc $\ell' \in \{0, \alpha\}$. Or, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n} \geqslant u_2 > 1 > \alpha$. et donc $\ell' \geqslant 1 > \alpha$. Impossible.
Donc $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

$\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = +\infty.}$

---

exercice 25 ESLSCA voie E 1997

1. Pour $n \in \mathbb{N}^\times$, on considère la fonction f_n, définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = x + 2x^2 + \cdots + nx^n = \sum_{k=1}^{n} kx^k$$

Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution, que l'on notera u_n.

2. En évaluant $f_{n+1}(u_n)$, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

3. a. Montrer que $f_n(x) = x \times \dfrac{1 - (n+1)x^n + n.x^{n+1}}{(1-x)^2}$.

b. Calculer u_2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n)^n$.

c. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Proposition de corrigé :

1. f_n est polynômiale donc dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot x^{k-1} > 0 \text{ pour } x > 0$$

Donc f_n est continue (car dérivable) et strictement croissante $\mathbb{R}^+$ et réalise donc une bijection de $\mathbb{R}^+$sur $\left[f(0)\,;\lim\limits_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}^+$
En effet, $f(0) = 0$ et $f_n(x) \geq 1.x^1 \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$.
Enfin, $1 \in \mathbb{R}^+$ donc

$\boxed{\text{l'équation } f_n(x) = 1 \text{ admet une unique solution } u_n \in \mathbb{R}^+.}$

2. On a pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot x^k \\ &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^k + (k+1)\, x^{k+1} \\ &= f_n(x) + (n+1)\, x^{n+1} \\ \text{donc} \quad f_{n+1}(u_n) &= f_n(u_n) + (n+1)(u_n)^{n+1} \\ &= 1 + (n+1)(u_n)^{n+1} \quad \text{car } f_n(u_n) = 1 \end{aligned}$$

Comme $u_n \geq 0$, $f_{n+1}(u_n) > 1$.
Or, $f_{n+1}(u_{n+1}) = 1$ donc $f_{n+1}(u_n) > f_{n+1}(u_{n+1})$
La bijection réciproque de f_{n+1} a même monotonie que f_{n+1} donc est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et $u_n > u_{n+1}$.

La suite u est donc strictement décroissante. Comme de plus elle est minorée par 0 elle converge d'après le théorème de la limite monotone vers un réel $\ell \geqslant 0$.

$$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge}}$$

3. a. Pour tout $x \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(1-x)f_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} kx^k - kx^{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[kx^k - (k+1)x^{k+1}\right] + \sum_{k=1}^{n} x^{k+1} \quad \text{par linéarité de la somme} \\
&= 1x^1 - (n+1)x^{n+1} + x\frac{x - x^{n+1}}{1-x} \quad \text{(somme téléscopique)} \\
&= x\left[1 - (n+1)x^n + \frac{x-x^{n+1}}{1-x}\right] \\
&= x \times \frac{(1-x) - (n+1)x^n(1-x) + x - x^{n+1}}{1-x} \\
&= x \times \frac{1 - x - (n+1)(x^n - x^{n+1}) + x - x^{n+1}}{1-x} \\
&= x \times \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+1}}{1-x} \\
&= x \times \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{1-x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{f_n(x) = x \times \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}}$$

on peut aussi y aller par récurrence, mais cette technique de « perturbation de somme est bien utile »

b. $f_2(x) = 1 \iff x + 2x^2 = 1 \iff 2x^2 + x - 1 = 0.$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 9 > 0$ donc il y a deux racines -1 et $1/2$. et u_2 est l'unique solution positive donc $u_2 = 1/2$ Et comme la suite est décroissante on a donc $0 \leq \ell \leq 1/2$

Comme la suite est décroissante, on a : $0 \leq u_n \leq u_0$ et, par croissance de $x \mapsto x^n$, $0 \leq (u_n)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ on a alors par encadrement, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n)^n = 0}$

De même, pour $0 \leq n(u_n)^n \leq \frac{n}{2^n} \to 0$ par croissances comparées et par encadrement $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n^n = 0}$

c. Avec les opérations usuelles sur les limites, on obtient donc :

$$f_n(u_n) = u_n \cdot \frac{1 - n(u_n)^n + (u_n)^n + n \cdot (u_n)^n \times u_n}{(1-u_n)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell\frac{1-0+0+0\times\ell}{(1-\ell)^2} = \frac{\ell}{(1-\ell)^2}$$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_n) = 1$, on obtient par unicité de la limite : $\dfrac{\ell}{(1-\ell)^2} = 1$

Ainsi, ℓ est solution de l'équation $(1-\ell)^2 \iff \ell^2 - 3\ell + 1 = 0$

Le discriminant du trinôme est $\Delta = 9 - 4 = 5$ donc

$$\ell = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad \ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

et comme $\ell \leq 1/2$ et que $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$