Ce qu'il faut savoir faire à l'issue de la séquence...

- *Connaître et utiliser les théorèmes de convergence classiques (théorème d'encadrement, théorème de la convergence monotone)*
- *Reconnaître et utiliser des suites adjacentes*
- *Majorer le terme général d'une suite*
- *connaître et rédiger les opérations sur les limites*
- *connaître et utiliser les croissances comparées des suites de référence pour lever les indéterminations.*

10

Convergence des suites de nombres réels

Limite d'une suite

Convergence, divergence

Définition 1 ***(Convergence d'une suite vers un réel)***

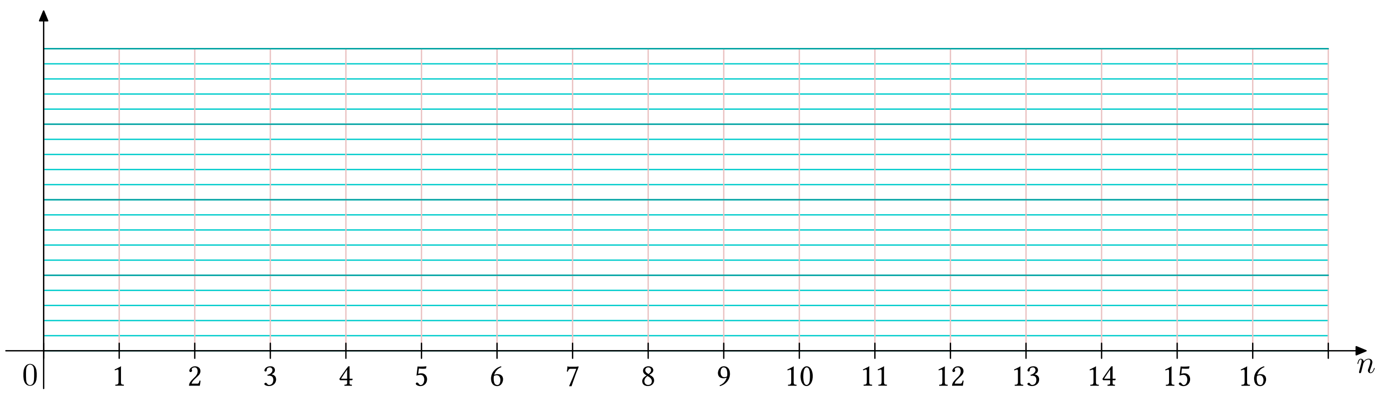
Soit ℓ un nombre réel. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque tout intervalle ouvert I contenant ℓ contient tous les termes de la suite u sauf un nombre fini. On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

On peut aussi formuler cette définition comme suit :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ lorsque
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| < \varepsilon$.

En quantificateurs, cela donne :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



Définition 2 ***(Divergence d'une suite vers l'infini)***

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ lorsque tout intervalle de la forme $]A,+\infty[$ contient tous les termes de la suite u sauf un nombre fini.

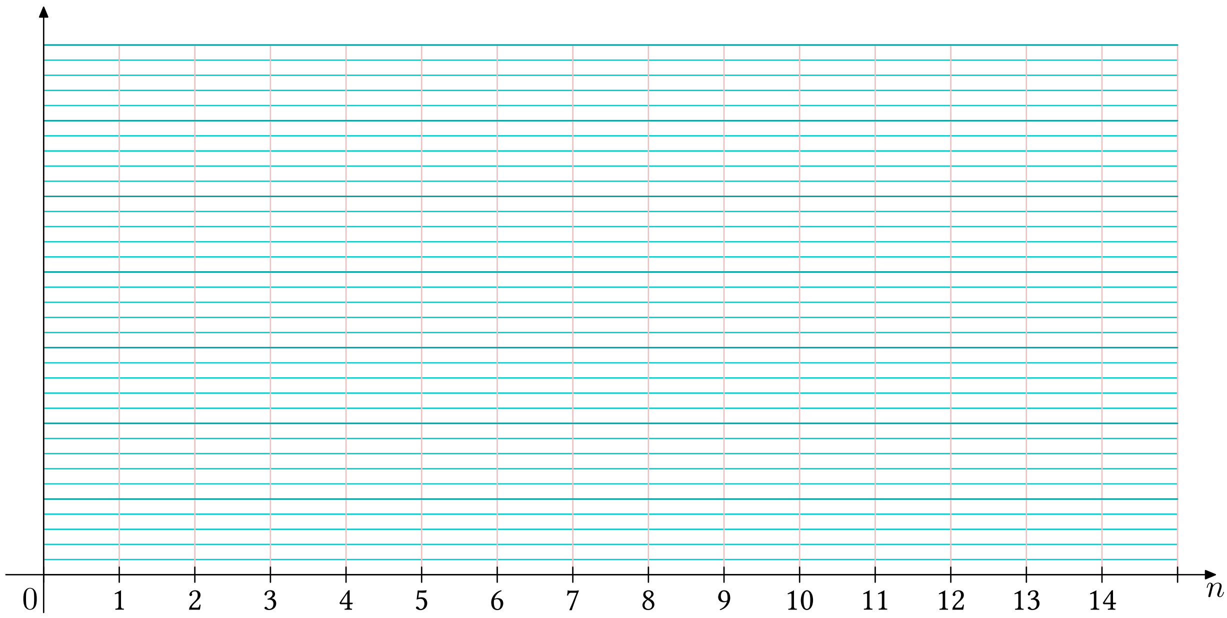
On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>diverge</u> vers $+\infty$, et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Si $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

On peut aussi formuler cette définition comme suit :
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ lorsque pour tout $A > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.

En quantificateurs, cela donne :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Propriété 1 ***(Unicité de la limite)***

Lorsque la limite de la suite u existe, elle est unique.

Preuve : (D.A.C)

On raisonne par l'absurde : supposons que la suite u possède deux limites distinctes ℓ et ℓ'.

Soit $\varepsilon = \frac{|\ell-\ell'|}{3} > 0$.
Par définition de la limite, on peut trouver des entiers n_0 et n_1 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon \quad \text{et} \quad n \geqslant n_1 \Longrightarrow |u_n - \ell'| < \varepsilon.$$

Soit $n \geqslant \max(n_0, n_1)$. On obtient par inégalité triangulaire :

$$|\ell - \ell'| = |\ell - u_n + u_n - \ell'| \leqslant |\ell - u_n| + |u_n - \ell'| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|\ell - \ell'|.$$

Cette dernière inégalité est absurde. D'où l'unicité de la limite. □

Propriété 2

Toute suite convergente est bornée.

Preuve : (D.A.C)

Soit u une suite qui converge vers un réel ℓ.
Par définition de la limite, pour l'intervalle ouvert $]\ell-1, \ell+1[$, il existe un entier n_0 tel que tous les termes de la suite à partir du rang n_0 sont dans $]\ell-1, \ell+1[$.
On a donc lorsque $n \geqslant n_0$, $\ell-1 \leqslant u_n \leqslant \ell+1$, c'est-à-dire $|u_n| \leqslant \max(|\ell-1|, |\ell+1|)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc :

$$|u_n| \leqslant \max(|u_0|, |u_1|, \ldots, |u_{n_0}|, |\ell-1|, |\ell+1|).$$

Le maximum d'un nombre fini de termes existant toujours, cela termine la preuve : la suite est bornée par ce maximum. □

On peut utiliser la contraposée de ce résultat pour prouver qu'une suite ne converge pas dans $\mathbb{R}$. Par exemple, si on prouve que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{4n+1} = +\infty$, on peut en déduire que la suite (u_n) n'est pas bornée, et donc n'admet pas de limite réelle.

Opérations algébriques sur les suites convergentes

Somme	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell'$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$-\infty$	F.I.	$-\infty$

Tableau 1.1 : Limite de la somme de deux suites u et v dans le cas où u et v admettent des limites

Produit	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell > 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell < 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' > 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell' < 0$	$\ell\ell'$	$\ell\ell'$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$	0	0	0	F.I.	F.I.
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.	$-\infty$	$+\infty$

Tableau 1.2 : Limite du produit de deux suites u et v dans le cas où u et v admettent des limites

Notations

Pour une suite (u_n) (ce sera différent pour les fonctions !), on ne parle que de limite « quand n tend vers $+\infty$ ». Ainsi, on peut parfois rencontrer des notations « allégées ».

En plus de la notation « officielle » $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, on trouve :

$$\lim u_n = \ell \qquad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad \text{voire} \quad u_n \longrightarrow \ell$$

Passage à la limite et relations d'ordre

Propriété 3 ***(Passage à la limite dans une relation d'ordre)***

Soient u et v deux suites.,

On suppose : u et v convergent
il existe n_0 tel que : $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$.

On a alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Preuve :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, si $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$.

On raisonne par l'absurde : supposons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n > \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
La suite $(u_n - v_n)$ converge alors vers une limite $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - \lim\limits_{n\to+\infty} v_n > 0$.
Posons $\varepsilon = \frac{\ell}{2} > 0$.
Il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_1$, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n - v_n \leqslant \ell + \varepsilon$
Ainsi, pour $n \geqslant \max(n_0; n_1)$, $0 < \ell - \frac{\ell}{2} \leqslant u_n - v_n$ ce qui contredit « $\forall n \geqslant n_0, u_n \leqslant v_n$. »

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. □

Attention, ce résultat ne s'applique que si on sait déjà que les deux limites existent.

Attention, **ce résultat ne se généralise pas aux inégalités strictes :**

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Voir par exemple les suites définies pour $n \geqslant 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$

Propriété 4 ***(Théorème d'encadrement, dit « des gendarmes »)***

Soient u, v et w trois suites réelles.

On suppose l'existence de n_0 tel que, si $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
et que u et w convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$

Alors v converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Preuve (D.A.C)
Soit $\varepsilon > 0$. D'après les hypothèses, il existe des entiers n_0, n_1 et n_2 tels que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
$$n \geqslant n_1 \Longrightarrow u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$
$$n \geqslant n_2 \Longrightarrow w_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$$

Posons $n_3 = \max(n_0, n_1, n_2)$. Pour $n \geqslant n_3$, on obtient $\ell - \varepsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \varepsilon$. Donc

$$\forall n \geqslant n_3 \Longrightarrow v_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[.$$

On a prouvé la convergence de v vers ℓ. □

Ce théorème donne **à la fois l'existence et la valeur** de la limite.

Propriété 5 ***(Théorème de comparaison)***

Soient u et v deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.

- Si u diverge vers $+\infty$ alors v diverge vers $+\infty$.
- Si v diverge vers $-\infty$ alors u diverge vers $-\infty$.

Preuve :
On montre le premier résultat, le deuxième se montre de la même manière.
Soit $A > 0$. D'après les hypothèses, il existe des entiers n_0 et n_1 tels que :

$$n \geqslant n_0 \Longrightarrow u_n \leqslant v_n$$
$$n \geqslant n_1 \Longrightarrow u_n > A$$

Pour $n \geqslant \max(n_0, n_1)$, on a donc $v_n \geqslant u_n > A$ donc $v_n > A$. Ce qui termine la preuve. □

Propriété 6 ***(Théorème de la limite monotone)***

- Toute suite croissante et majorée converge vers un réel ℓ.
- Toute suite décroissante et minorée converge vers un réel ℓ.

Preuve : la preuve n'est pas à connaître.
Retenir simplement qu'elle repose sur le théorème de la borne supérieure.

$\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la borne supérieure, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $\ell - \varepsilon \leqslant u_N \leqslant \ell$. Comme $(u_n)_n$ est croissante, pour tout entier $n \geqslant N, u_N \geqslant u_n$ et, par définition de la borne supérieure, $u_n \leqslant \ell$. Ainsi, $\ell - \varepsilon \leqslant u_n \leqslant \ell \leqslant \ell + \varepsilon$. Finalement, on a prouvé :
$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$. C'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$

Pour le cas décroissant minoré, on peut adapter ce qui précède ou considérer la suite $(-u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Remarque

Ce théorème est surtout utilisé pour démontrer l'**existence** d'une limite finie.
Il **ne donne pas la limite**.

Attention, connaître un majorant ne signifie pas qu'il s'agit de la limite de la suite. En effet, si 2 est majorant, alors 3 aussi, 7 aussi...

Par contre, si, (u_n) est croissante et majorée par 2, alors (u_n) converge vers un réel $\ell \leqslant 2$. Le majorant majore la limite et ceci peut être très utile pour démartager deux candidats limite.

Propriété 7

- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Preuve :
Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.
Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N \geqslant A$.
Comme (u_n) est croissante, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N \geqslant A$. Finalement, on a prouvé que :
$\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant A$, c'est à dire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. □

En pratique en énoncé, on peut être amené à prouver qu'une suite est croissante et suit la question : **En déduire que la suite admet une limite réelle ou infinie.**
Dire simplement : « $(u_n)_n$ est croissante (d'après la question précédente) donc admet une limite finie ou infinie » paraphrase trop l'énoncé.
Préférer :« $(u_n)_n$ est croissante donc, si elle est majorée elle converge vers un réel d'après le TLM. Si elle n'est pas majorée, elle dépasse tout réel à partir d'un certain rang (puisqu'elle est croissante) donc diverge vers $+\infty$ »

MONOTONIE D'UNE SUITE

Pour utiliser le théorème précédent, on aura besoin d'outils pour prouver la monotonie d'une suite.

Les outils à disposition sont :

• $\boxed{\text{signe de } u_{n+1} - u_n}$ utilisable **sans condition**.
C'est un test très important, qui aboutit souvent. Pratique en particulier quand (u_n) est définie avec un Σ.

• $\boxed{\text{comparaison à 1 de } \dfrac{u_{n+1}}{u_n}}$ **ce test n'est valable <u>que</u> pour les suites à termes <u>strictement</u> positifs !** Très pratique quand on a des produits, puissances, factorielles...

• $\boxed{\text{Récurrence}}$ moins utilisé mais très classique tout de même ! Par exemple pour prouver que (u_n) est croissante, on prouve $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \geqslant u_n$ » par récurrence.
Cette façon de faire est en particulier utile pour les suites définies par une relation de la forme $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ avec f une fonction <u>croissante</u> (nous reparlerons plus en détails de ces suites) mais pas que !

On peut être amené à prouver <u>en même temps</u> que la suite est majorée. On prouverait alors par récurrence que $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant M$ » est vraie pour tout n, ce qui prouve que la suite est décroissante, mminorée, donc convergente !

• Les résultats sur les suites de référence (arithmétique, géométrique) et les fonctions de référence.

suites définies par une intégrale

• $\boxed{\text{croissance de l'intégrale :}}$
si, pour tout $x \in [a, b]$, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$, alors $\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x$.

• $\boxed{\text{intégration par parties}}$ (voir cours sur l'intégration, à venir)

suites définies implicitement

Dans certains exercices, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n comme étant l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$. Très souvent, f est strictement monotone (et continue) sur un intervalle.
Pour étudier la monotonie de $(u_n)_n$, on est amené par exemple à étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$ (ou de $f_n(u_{n+1})$).

Si par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante et qu'on trouve par exemple $f_{n+1}(u_n) < 0$, en se souvenant que $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, il vient $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc, par stricte décroissance de f_{n+1}, $u_n > u_{n+1}$. Dans ce cas la suite (u_n) serait décroissante.

ces idées générales sont à adapter à chaque exercice

Se souvenir qu'on joue souvent à la fois sur les monotonies de :
• $n \mapsto f_n(x)$ (x fixé)
• $x \mapsto f_n(x)$ (n fixé)

Rappel des croissances comparées

Les formes indéterminées mettent souvent en jeu les mêmes fonctions. Les croissances comparées permettent de lever les indéterminations dans ces cas classiques.

Les comparaisons suivantes sont à connaître parfaitement, et réutilisables avec le simple rappel : « par croissances comparées ».

Le tableau est à comprendre comme suit : en cas de **produit** comportant des éléments de deux colonnes (ou plus), c'est le comportement de la colonne avec le plus faible numéro qui l'emporte.

1	2	3	4
$\lim\limits_{n\to+\infty} n! = +\infty$	$q > 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$	$a > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$	$b > 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = +\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$	$\lvert q \rvert < 1$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$	$a < 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = 0$	$b < 0$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln n)^b = 0$

Exemple n° 1 voir exercice n°1

Attention : les croissances comparées ne sont pas une *formule magique* qu'on invoque quand on ne sait pas quoi dire d'autre. Les indéterminations en jeu doivent correspondre exactement aux fonctions ci-dessus.

En particulier, pour une somme, on factorisera par le « terme dominant » pour mettre en évidence la forme indéterlinée sous forme de produit/quotient.

On peut toutefois les utiliser « en composition ». Par exemple, on pourra rédiger : $\frac{\ln(n^2+1)}{n^2} = \frac{n^2+1}{n^2} \times \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1}$. $\lim_{n\to+\infty} n^2+1 = +\infty$ donc, par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1} = 0$ par croissances comparées.
Comme de plus $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1$, par produit de limites, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2} = 0$.

Nous verrons d'autres outils plus tard dans l'année :
- les équivalents : ils simplifient la rédaction.
- les développements limités : peuvent servir dans les cas ne se ramenant pas à une des croissances comparées.

Suites adjacentes

Définition 3 ***(Suites adjacentes)***

Soient u et v deux suites. On dit qu'elles sont adjacentes lorsque
- u est croissante,
- v est décroissante,
- $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété 8 ***(Convergence des suites adjacentes)***

Soit u et v deux suites adjacentes telles que u est croissante et v est décroissante. Alors u et v convergent vers une même limite réelle ℓ.

Preuve :

Version complète :

- $u-v$ converge (vers 0), et est donc majorée par un réel M.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n - v_n + v_n \leqslant M + v_n \leqslant M + v_0$ par décroissance de v.
Donc u est majorée. Or u est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_u, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_u \geqslant u_n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_n - u_n + u_n \geqslant -M + u_n \geqslant -M + u_0$ par croissance de u.
Donc v est minorée. Or v est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_v, et on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ell_v \leqslant v_n$.
- Par somme de limites, $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_u - \ell_v$. Or on a supposé que cette suite convergeait vers 0. Donc $\ell_u = \ell_v$.
Donc u et v convergent vers une même limite réelle, et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$. □

VERSION « SIMPLE » : Si on suppose dès le départ (au lieu de le démontrer) que : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant u_n$, la démonstration est plus simple

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ par décroissance de v.
  Donc u est majorée. Or u est croissante donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_u,
- De même,
  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant u_n \geqslant u_0$ par croissance de u.
  Donc v est minorée. Or v est décroissante donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge vers un réel ℓ_v.
- Par somme de limites, $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_u - \ell_v$. Or on a supposé que cette suite convergeait vers 0.
  Donc par unicité de la limite, $\ell_u - \ell_v = 0$ et $\ell_u = \ell_v$.
  Donc u et v convergent vers une même limite. □

En pratique, si on envisage d'utiliser deux suites adjacentes, c'est que l'on dispose de deux suites dont l'écart tend vers 0. Si les variations ne sont pas toujours évidentes, on peut le déduire en sachant laquelle majore l'autre. Par exemple, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$, v sera la suite décroissante et u la suite croissante.

Il découle de la preuve que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

On peut le justifier plus simplement ainsi :

(u_n) converge en croissant vers ℓ donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \ell$.
(v_n) converge en décroissant vers ℓ donc : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant \ell$.

Exemple n° 2 Soit, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n!}$.
Démontrer que ces suites sont adjacentes.

u est croissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} \geqslant 0.$$

v est décroissante car $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!} \leqslant 0.$$

$v - u$ tend vers 0 car $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Les deux suites sont adjacentes, donc convergentes vers une même limite réelle. On verra plus tard que la limite commune est e.

On est souvent amené à prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, et donc convergent vers une même limite. On ne peut pas alors conclure la convergence de (u_n) (cf exercice 13). Voici un théorème qui permet de le faire.

Propriété 9

Soit (u_n) une suite.

- si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.
- Réciproquement, si (u_n) converge vers ℓ, alors (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ.

ce dernier résultat s'utilise souvent via sa contraposée.

•Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne convergent pas vers une même limite réelle, alors (u_n) diverge.

Complément

Propriété 10

Soit (u_n) une suite vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}.\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ **et si f est continue en ℓ**,
ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.

• C'est bien la continuité de f en ℓ qui permet d'affirmer que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_{n+1}) = f(\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}) = f(\ell)$$

• **Toujours être méfiant avec les interversions de limite !** Elles sont en général fausses et ne sont vraies que sous certaines hypothèses (ici, la continuité) à rappeler.

• C'est une condition suffisante, mais non nécessaire.

• Nous reviendrons régulièrement sur les suites de ce type plus tard.

Exercices

exercice 1 Déterminer les limites des expressions ci-dessous quand $n \to +\infty$:

a. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$

b. $b_n = \ln n - n^2$

c. $c_n = 2^n - n$

d. $d_n = n^{\frac{1}{n}}$

e. $e_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

f. $f_n = \ln n - \sqrt{\ln n}$

g. $g_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$

h. $h_n = \dfrac{n - \ln n}{n - 2^n}$

i. $i_n = \dfrac{n!}{(2n)!}$

j. $j_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$

k. $k_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{2^n}$

l. $l_n = \dfrac{\sqrt{2^{n^2}}}{n!}$

Proposition de corrigé :

a. $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} = \dfrac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} \to 0$

b. $b_n = \ln n - n^2 = n^2(\frac{\ln n}{n^2} - 1)$. Par croissances comparées, $\lim \frac{\ln n}{n^2} = 0$ donc $\lim(\frac{\ln n}{n^2} - 1) = -1$ et $\lim b_n = -\infty$ par produit de limites

c. $c_n = 2^n - n = 2^n(1 - \frac{n}{2^n}$. Comme $\frac{n}{2^n} = 0$ par croissances comparées, $\lim c_n = +\infty$

d. $d_n = n^{\frac{1}{n}} = exp(\frac{1}{n}\ln n)$. Or, par croissances comparées, $\lim \frac{1}{n}\ln n = 0$ donc, par continuité de l'exponentielle en 0, $\lim d_n = 1$

e. $e_n = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(1+\frac{1}{n}) \to \ln(1) = 0$ par continuité de $\ln$ en 1

f. $f_n = \ln n - \sqrt{\ln n} = \ln(n)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln n}}\right)$. Comme $\lim 1 - \frac{1}{\sqrt{\ln n}} = 1$, par produit de limites, on trouve $\lim f_n = +\infty$

g. $g_n = \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Par définition de la partie entière, on a, pour tout n, $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor + 1$ donc $nx - 1 \leqslant \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ puis $x - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$. Comme $\frac{1}{n} \to 1$, il vient $\lim g_n = x$

h. $h_n = \dfrac{n - \ln n}{n - 2^n} = \dfrac{n\left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right)}{2^n\left(\dfrac{n}{2^n} - 1\right)}$. Par croissances comparées, $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim \frac{n}{2^n} = 0$ donc $\lim \frac{1 - \frac{\ln n}{n}}{\frac{n}{2^n} - 1} = -1$ et $\lim h_n = 0$ par produit de limites.

i. $i_n = \dfrac{n!}{(2n)!} = \displaystyle\prod_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} < \frac{1}{n^n} \to 0$. Comme de plus $i_n > 0$, le théorème d'encadrement donne $\lim i_n = 0$

j. $j_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2} = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{n+k}{k} = (n+1)\prod_{k=2}^{n} \frac{n+k}{k} > (n+1)$ car $\forall k \in [\![2;n]\!]$, $\frac{n+k}{k} > 1$ Comme $\lim n+1 = +\infty$, par comparaison, $\lim j_n = +\infty$

k. $k_n = \dfrac{\sqrt{n!}}{2^n}$. $\forall n \in \mathbb{N}, k_n^2 = \dfrac{n!}{2^{2n}} = \dfrac{n!}{4^n}$. Par croissances comparées, $\lim k_n^2 = +\infty$ et en composant avec $x \mapsto \sqrt{x}$ on obtient $\lim k_n = +\infty$

l. $l_n = \dfrac{\sqrt{2^{n^2}}}{n!}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$\ln(l_n) = \frac{n^2}{2}\ln(2) - \ln(n!) \geqslant \frac{n^2}{2}\ln(2) - \ln(n^n) \geqslant \frac{n^2}{2}\ln(2) - n\ln(n) \geqslant n^2\left(\frac{\ln(2)}{2} - \frac{\ln(n)}{n}\right)$

Par croissances comparées, $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$ donc par produit de limites $\lim \ln(l_n) = +\infty$ puis en composant avec l'exponentielle, on trouve $\lim l_n = +\infty$

---

exercice 2 Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

1. Étudier la monotonie et la convergence de (u_n).
2. Écrire une fonction Python `suite2(n)` qui calcule u_n

Proposition de corrigé :
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=n+2}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} + \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \frac{2}{2(n+1)} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{2}{2(n+1)} \\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} \\
&> 0
\end{aligned}$$

donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

D'autre part, $\forall k \in [\![n+1; 2n]\!]$, $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n+1}$. La somme comportant n termes, il vient :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{n}{n+1} < 1$

(u_n) est croissante et majorée par 1 donc, d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers une limite réelle } \ell}$.

Une version astucieuse :

```python
def suite2(n):
    u = 0
    for k in range(n+1,2*n+1):
        u = u+1/k
    return u
```

---

exercice 3 Soit $a > 1$.
Montrer que la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{a^n}{n!}$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Proposition de corrigé :
Tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs, et on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1} n!}{a^n (n+1)!} = \frac{a}{n+1}$$

Pour tout $n \geqslant a - 1$, on aura $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ et (u_n) sera décroissante à partir de $N = \lfloor a \rfloor$

$\boxed{\text{La suite est décroissante à partir d'un certain rang}}$

Les résultats de croissance comparées assurent que $a^n = o(n!)$ et donc la suite converge vers 0.

---

exercice 4 Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$ pour $n \geqslant 1$

Proposition de corrigé :

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2}$. Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n = f(n)$

f est dérivable sur I comme quotient de fonctions dérivables sur I, le dénominateur ne s'annulant pas et on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{1}{x^2} + \frac{-2}{x^3} \ln x = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$$

Ainsi, pour $x \in I$, $f'(x)$ est du signe de $1 + 2\ln x$ d'où les variations de f

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Comme $\mathrm{e} \approx 2,7$ (c'est une valeur approchée à connaître !) et $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$ alors $1 < \mathrm{e}^{\frac{1}{2}} \leqslant 2$, on en déduit que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir du rang } 2}$.

Le tableau ou les résultats de croissance comparées assurent que $\ln n = o(n^2)$ et donc la suite converge vers 0.

exercice 5 Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1} \end{cases}$

1. Étudier la monotonie de (u_n)
2. Montrer que (u_n) est majorée par 2.
3. Conclure sur la convergence de (u_n)
4. Écrire une fonction Python `suite5(n)` calculant u_n.

Proposition de corrigé :
Les questions 1 et 2 peuvent se traiter en une seule récurrence (d'où l'intérêt de ragarder rapidement les questions qui suivent dans un sujet).

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$ »

I $u_0 = 0$ et $u_1 = \sqrt{0+1} = 1$ donc on a bien $u_0 \leqslant u_1 \leqslant 2$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

H Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain entier $n \geqslant 0$.L'hypothèse de récurrence se traduit en :

$$\begin{array}{lrcl} & u_n \leqslant & u_{n+1} & \leqslant 2 \\ \text{d'où} & 1+u_n \leqslant & 1+u_{n+1} & \leqslant 1+2 \\ \text{puis} & \sqrt{1+u_n} \leqslant & \sqrt{1+u_{n+1}} & \leqslant \sqrt{3} \\ \text{enfin,} & u_{n+1} \leqslant & u_{n+2} & \leqslant 2 \quad \text{car } \sqrt{3} \leqslant \sqrt{4} = 2 \end{array}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et l'hérédité est prouvée.

C $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie

Ce qui précède prouve que $\boxed{(u_n) \text{ est croissante et majorée par } 2}$, ce qui répond aux questions 1 et 2. Le théorème de la limite monotone permet donc d'affirmer que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell}$. De plus, par continuité de la fonction racine carrée, ℓ vérifie $l = \sqrt{l+1}$ donc l est solution de l'équation $x^2 = x + 1$. Donc $\ell \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Comme u est positive, $\ell \geqslant 0$. Or, $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

```python
import math
def suite5(n):
    u = 0
    for i in range(1,n+1):
        u = math.sqrt(u+1)
    return u
```

exercice 6 Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2020$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{e^{-u_n}}{n+1}$

1. Montrer que la suite converge et déterminer sa limite ℓ.

2. Écrire une fonction Python `suite6(n)` qui, à une entrée n associe en sortie u_n.

3. En utilisant la fonction précédente, écrire un code Python qui détermine le plus petit entier N tel que $|u_n - \ell| < 10^{-3}$

Proposition de corrigé :

La suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ car la fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, $u_0 = 2020 > 0$ et, pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \frac{e^{-u_{n-1}}}{n} > 0$

   Par suite $0 < e^{-u_n} < 1$ puis, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$

   Or, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$

2.

```
def suite6(n):
    u = 2020
    for i in range(0,n):
        u = math.exp(-u)/(i+1) # i joue le role de n
    return u
```

3.

```
def suitelim(eps):
    n = 2
    while suite6(n)>eps:
        n+=1
    return n
```

Remarque : e^{-2020} *est un nombre extraordinairement petit. Python ne fait pas la différence avec 0. Il n'y a qu'en mathématiques qu'on le verra non nul ! Aussi le programme renverra immanquablement $N = 2$. Pour étudier la vitesse de convergence, puisque $u_1 \approx 0$, $u_2 \approx \frac{1}{2}$ et il faudrait en fait commencer par exemple avec $n = 2$ ou plus...*

Pour un algorithme plus efficace (plus rapide) en 3. on aurait pu faire :

```
def suitelim(eps):
    u = 2020
    n = 0
    while (u > eps) or (n<=1):
        u = math.exp(-u)/(n+1) # i joue le role de n
        n = n+1
    return n
```

La condition `n<=1` assure qu'on trouve bien le point à partir duquel on a la précision voulue.

exercice 7 Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}$ et $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

1. Calculer S_n pour tout entier $n \geqslant 2$ et en déduire que (S_n) converge dans $\mathbb{R}$.

2. En déduire que (T_n) converge.

Proposition de corrigé :

1. Soit $n \geqslant 2$. $S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1-k+k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right)$
   On reconnaît une somme télescopique.
   Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 1 - \frac{1}{n}}$ et il vient $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = 1}$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, on a $k(k-1) < k^2$ d'où $\frac{1}{k(k-1)} > \frac{1}{k^2}$ puis, par sommation $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} > \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}$ et enfin $T_n < S_n + 1$ soit $T_n < 2 - \frac{2}{n} < 2$

   De plus, (T_n) est croissante. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} - T_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

   Ainsi, $\boxed{(T_n) \text{ est croissante et majorée, donc convergente}}$.

exercice 8 On rappelle que la suite (φ_n) dite de Fibonacci a un terme général donné par :

$$\varphi_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

1. Déterminer $\lim \varphi_n$

2. Déterminer $\lim \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n}$

Proposition de corrigé :

Notons $q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.
On a $4 < 5 < 9$ donc $2 < \sqrt{5} < 3$ par croissance de $x \mapsto \sqrt{x}$
d'où $\frac{1+2}{2} < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \frac{1+3}{2}$ et $\frac{1-2}{2} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} > \frac{1-3}{2}$
On a $0 < |\,q_2\,| < 1 < |\,q_1\,|$

1. Comme $|\,q_2\,| < 1$, $\lim_{n\to+\infty} q_2^n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}(q_1^n - q_2^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} q_1^n = +\infty$ car $q_1 > 1$.
   $$\boxed{\lim \varphi_n = +\infty}$$

2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = \frac{q_1^{n+1} - q_2^{n+1}}{q_1^n - q_2^n} = \frac{q_1^{n+1}}{q_1^n} \times \frac{1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n} = q_1 \frac{1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n}$

   Or, $0 < \left|\frac{q_2}{q_1}\right| < 1$ donc $\lim \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^n = \lim \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{n+1} = 0$

   Ainsi, $\boxed{\lim \frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_n} = q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$

exercice 9 Résolution de formes indéterminées (avec ou sans croissances comparées) :

Déterminer les limites suivantes.

a. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ par croissances comparées, car $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$

b. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(n^2)}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\ln(n)}{n^{\frac{1}{2}}} = 0$ par croissances comparées.

c. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)$

En utilisant la quantité conjuguée, on trouve pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n} = \frac{n+\sqrt{n}-n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+1},$$

d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right) = \frac{1}{2}$.

d. $\lim\limits_{n\to+\infty} (n! - e^n)$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} n!\left(1-\frac{e^n}{n!}\right) = +\infty$ car par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n!} = 0$.

e. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2^n - n^2\ln(n^3))$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n\left(1-\frac{3n^2\ln(n)}{2^n}\right) = +\infty$ car $|2| > 1$ et par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2\ln(n^3)}{2^n} = 0$.

f. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n-1)(2n+3)}{4n^2}$

$= \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(1-\frac{1}{n})(2+\frac{3}{n})}{4} = \frac{1}{2}$.

g. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n$

$\forall n \geqslant 1$, $\left(\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\frac{1}{n} = -\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\frac{1}{n} = -\infty$ par produit de limites.

Donc par composition de limites, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^n = 0$.

Plus simple, $0 < \left(\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{n^n} <= \frac{1}{n} \to 0$ (merci Alexandre V)

h. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

C'est un piège : on ne peut pas le calculer avec les règles de calcul dont on dispose actuellement. En effet, la limite est à la fois dans la puissance et la parenthèse, on a une forme indéterminée du type « $(1^+)^{+\infty}$ ».

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n\ln(1+\frac{1}{n})\right) = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}\right)$

Or, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, donc par continuité de l'exponentielle en 1, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$

exercice 10 On considère la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 10 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{u_n+1} \end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée. En déduire qu'elle est convergente et préciser sa limite.

2. a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{u_n-2}{3}$
   b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leqslant u_n - 2 \leqslant \frac{8}{3^n}$
   c. Soit $\varepsilon > 0$. On note ℓ la limite de la suite (u_n). À partir de quel rang n_0 peut-on affirmer que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon \ ?$$

Proposition de corrigé :

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n+1} - \frac{u_n^2+u_n}{u_n+1} = \frac{-u_n^2+2u_n}{u_n+1} = \frac{u_n(2-u_n)}{u_n+1}$

Il suffit de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2$. Montrons le par récurrence.
Pour $n = 0, u_0 = 10 \geqslant 2.$
Supposons $u_n \geqslant 2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n}{u_n+1} - 2 = \frac{u_n-2}{u_n+1}$
Or, par HR, $u_n - 2 \geqslant 0$ et $u_n + 1 > 0$ donc $u_{n+1} - 2 \geqslant 0$ ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et l'hérédité.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 2$

$\boxed{(u_n) \text{ est décroissante et minorée par 2.}}$
Elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 2$. Par continuité, on a $\ell = \frac{3\ell}{\ell+1}$. ℓ est solution de l'équation $x^2 - 2x = 0$. $\ell = 2$ est la seule solution vérifiant $\ell \geqslant 2$, on en déduit $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n}{u_n+1} - 2 = \frac{3u_n}{u_n+1} - \frac{2u_n+2}{u_n+1} = \frac{u_n-2}{u_n+1} \leqslant \frac{u_n-2}{3}$ car on a prouvé que $u_n \geqslant 2$ et donc $u_n + 1 \geqslant 3$

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{u_n-2}{3}}$
On a déjà prouvé que, pour tout entier n, $u_n - 2 \geqslant 0$. Montrons par récurrence que $u_n - 2 \leqslant \frac{8}{3^n}$
• Pour $n = 0$, on a $u_0 - 2 = 10 - 2 = 8 \leqslant \frac{8}{3^0}$
• Supposons que l'on ait $u_n - 2 \leqslant \frac{8}{3^n}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors, d'après ce qui précède, $u_{n+1} - 2 \leqslant \frac{u_n-2}{3} \leqslant \frac{1}{3}\frac{8}{3^n}$ par HR.
d'où $u_{n+1} \leqslant \frac{8}{3^{n+1}}$ ce qui prouve l'hérédité.
•Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n - 2 \leqslant \frac{8}{3^n}}$

(u_n) étant décroissante, on a $\ell \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Une condition suffisante pour avoir $u_n \leqslant \ell + \varepsilon$ est d'avoir $\frac{8}{3^n} < \varepsilon$, soit $3^n > \frac{8}{\varepsilon}$ ou $n\ln(3) > \ln(\frac{8}{\varepsilon})$
$\boxed{\text{Soit } \varepsilon > 0. \text{ Pour } n > \dfrac{\ln 8 - \ln\varepsilon}{\ln 3}, \text{ on a } \ell \leqslant u_n \leqslant \ell + \varepsilon}$

exercice 11 Soit (a_n) et (b_n) les suites définies par :

$$\begin{cases} a_0 = a > 0 \\ b_0 = b \geqslant a \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \\ b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

Démontrer que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes vers une même limite.

Proposition de corrigé :

Montrons d'abord que les deux suites sont bien définies. Il suffit de prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$. Montrons le par récurrence.

• Pour $n = 0$, on a par hypothèse $a_0 = a > 0$ et $b_0 = b > a > 0$.
• Supposons $a_n > 0$ et $b_n > 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors $a_n b_n > 0$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0$. De même, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} > 0$. D'où l'hérédité.
• On a bien, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$

Les suites (a_n) et (b_n) sont bien définies.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} - \sqrt{a_n b_n} = \frac{\sqrt{a_n}^2 - 2\sqrt{a_n b_n} + \sqrt{b_n}^2}{2} = \frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2}{2} \geqslant 0$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geqslant 1$ car $b_n \geqslant a_n$ d'après ce qui précède.
Ainsi, la suite (a_n) est croissante.

$b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leqslant 0$ d'après ce qui précède donc (b_n) est décroissante.

exercice 12 série harmonique

Pour tout entier n non nul, on pose $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

On pose alors $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

1. Démontrer que, pour tout $x \in \left]-1;+\infty\right[, \ln(1+x) \leqslant x$

2. Montrez que u et v sont deux suites adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
On note γ la limite de u (Ce réel est appelé la constante d'Euler).

3. À partir de quel entier est-on assuré que u_n est une approximation de γ à 10^{-3} près ?

<u>Proposition de corrigé</u> :

1. Cette inégalité découle directement de la concavité de la fonction $\ln$. Le chapitre sur la convexité comptera parmi les derniers de l'année. Nous allons redémontrer le résultat.

   Soit f la fonction définie sur $I = \left]-1;+\infty\right[$ par $f(x) = \ln(1+x) - x$.
   f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et,
   $\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x}$.
   Or, pour tout $x \in I, 1+x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $-x$.
   f est croissante sur $\left]-1;0\right[$ et décroissante sur $\left]0;+\infty\right[$ donc admet un maximum en 0.
   Ainsi, pour tout $x \in I, f(x) \leqslant f(0) = 0$.
   $$\boxed{\forall x \in I, \ln(1+x) \leqslant x}$$

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $$u_{n+1} - u_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) = \tfrac{1}{n+1} + \ln\left(\tfrac{n}{n+1}\right)$$
   $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$ d'après 1) avec $x = -\frac{1}{n+1} \in I$
   (u_n) est décroissante

   • Pour tout $n \in \mathbb{N}*$,
   $$v_{n+1} - v_n = \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n} - \ln\left(\tfrac{n+1}{n}\right)$$
   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \geqslant 0$ d'après 1) avec $x = \frac{1}{n} \in I$
   (v_n) est croissante

   • $u_n - v_n = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

   Ainsi, $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes}}$, donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent vers une même limite } \gamma \in \mathbb{R}}$

3. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$. Ainsi, $|\,u_n - \gamma\,| \leqslant |\,u_n - v_n\,| \leqslant \frac{1}{n}$
   or, $\frac{1}{n} \leqslant 10^{-3} \iff n \geqslant 10^3$
   $$\boxed{\text{Pour } n \geqslant 10^3,\ u_n \text{ est une approximation de } \gamma \text{ à } 10^{-3}}$$

> La condition $n \geqslant 10^3$ est *suffisante* mais a priori *non nécessaire*.
> La précision souhaitée sera vraisemblablement atteinte avant le rang 1000.

exercice 13

1. Montrer que la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ converge vers une limite ℓ.
   indication : on pourra commencer par étudier les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1})

2. Déterminer la valeur de ℓ.
   on pourra exprimer u_n en fonction de $(H_n)_n)$ et utiliser le résultat de l'exercice précédent, que l'on peut formuler en :
   $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \gamma + \ln n + \varepsilon_n$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $(\varepsilon_n)_n$ est une suite suite réelle convergeant vers 0.

Proposition de corrigé :
Montrons que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$u_{2(n+1)} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} + \frac{-1}{2n+1} = \frac{-1}{2n(2n+1)} < 0$
donc $(u_{2n})_n$ est décroissante

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$u_{2(n+1)+1} - u_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)} > 0$
donc $(u_{2n+1})_n$ est croissante

• Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont donc adjacentes, et convergent vers une même limite.

attention : ce n'est pas encore terminé !

Reste à montrer que (u_n) converge. Notons ℓ la limite commune à $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. D'après ce qui précède,
Comme $u_{2n+1} \to \ell$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, |u_{2n+1} - \ell| < \varepsilon$.
Comme $u_{2n} \to \ell$, $\quad \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_2, |u_{2n} - \ell| < \varepsilon$.

En posant $n_0 = \max(2n_1 + 1, 2n_2)$, on a$^{(*)}$: $\forall n \geqslant n_0, |u_n - \ell| < \varepsilon$.

$$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell.}$$

$(*)$ pour détailler un peu : si $n \geqslant n_0$.
• Soit n est pair et s'écrit $n = 2p$.
Alors $2p \geqslant 2n_2$ et donc $p \geqslant n_2$ et $|u_{2p} - \ell| < \varepsilon$, c'est à dire $|u_n - \ell| < \varepsilon$
• Soit n est impair et s'écrit $n = 2p + 1$.
Alors $2p + 1 \geqslant 2n_1 + 1$ et donc $p \geqslant n_1$ et $|u_{2p+1} - \ell| < \varepsilon$ c'est à dire $|u_n - \ell| < \varepsilon$
• Dans tous les cas, on a bien $|u_n - \ell| < \varepsilon$

Remarque 1 : Cette méthode est à retenir. On peut montrer que si $(\alpha_n)_n$ est une suite décroissante ayant pour limite 0. La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^n}{\alpha_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente par la même méthode (les suites des termes pairs et impairs sont adjacentes)

exercice 14 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout n entier par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}$

1. Montrer que pour tout $k > 2$, $\frac{2^k}{k!} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$

2. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell \in [6, 9]$.

Proposition de corrigé :

1) Pour $k \geqslant 3$, notons $\mathcal{P}(k)$: « $\frac{2^k}{k!} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$ »

$\boxed{\text{I}}$ Pour $k = 3$, on a d'une part $\frac{2^3}{3!} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$ et d'autre part $2\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

$\boxed{\text{H}}$ Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie pour un entier $k \geqslant 3$.

Alors on a $\frac{2^k}{k!} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}$. en multipliant par $\frac{2}{k+1}$,

il vient : $\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{2}{k} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{2}{3}$ car $k \geqslant 3$.

Finalement, $\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{(k+1)-2}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. L'hérédité est prouvée.

$\boxed{\text{C}}$ $\mathcal{P}(3)$ est vraie et, pour tout $k \geqslant 3$, $\mathcal{P}(k) \Rightarrow \mathcal{P}(k+1)$ donc le principe de récurrence permet d'affirmer que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 3$.

$$\boxed{\forall k \geqslant 3, \quad \frac{2^k}{k!} \leqslant 2\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}}$$

2) Pour tout $n \geqslant 3$,

$$\begin{aligned}
u_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \\
&= 1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \sum_{k=3}^{n} \frac{2^k}{k!} \\
&\leqslant 5 + 2\sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \\
&\leqslant 5 + 2\sum_{j=1}^{n-2} \left(\frac{2}{3}\right)^{j} \\
&\leqslant 5 + 2 \times \frac{2}{3} \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}}{1-\frac{2}{3}} \\
&\leqslant 5 + 4\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}\right) \\
&\leqslant 9
\end{aligned}$$

La suite (u_n) est croissante ($\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{2^n}{n!} > 0$) et majorée par 9, donc convergente vers un réel $\ell \leqslant 9$. Un calcul simple prouve que $u_3 > 6$ donc $\ell \geqslant 6$

$\boxed{(u_n) \text{ est convergente vers un réel } \ell \in [6; 9]}$

exercice 15 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x$

Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

En déduire la limite de la suite (u_n)

Proposition de corrigé :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto \frac{1}{1+x^n}$ est continue, donc l'intégrale est bien définie et on a :

$$\begin{aligned}
1 - u_n &= 1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{1+x^n-1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

D'une part, $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^n}$ est positive sur $[-1;1]$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ par positivité de l'intégrale puis $1-u_n \geqslant 0$.

D'autre part, pour tout $x \in [-1;1]$, $\frac{x^n}{1+x^n} \leqslant x^n$.

Ainsi, par croissance de l'intégrale, $1 - u_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$

On a prouvé : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement permet d'affirmer que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1}$

name : yoda
file : yoda
state : unknown

Astuce à retenir : pour « combiner une intégrale avec un nombre, exprimer ce nombre sous forme intégrale »

exercice 16 Suite définie implicitement

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on définit la fonction f_n par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_n(x) = x^n + 9x^2 - 4.$$

1. a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, notée u_n.
   b. Calculer u_1 et u_2 .
   c. Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[$.

2. a. Montrer que, pour tout x élément de $]0;1[$, on a : $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
   b. En déduire le signe de $f_n(u_{n+1})$, puis les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

3. a. Déterminer la limite de $(u_n^n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   b. Donner enfin la valeur de ℓ .

Proposition de corrigé :

1. a. $x \mapsto x^n$ et $x \mapsto x^2 + 4$ sont strictement croissantes sur $[0;+\infty[$ donc f_n est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions strictement croissantes.
   De plus, f est polynômiale donc continue et le théorème de la bijection continue assure que f réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur $f([0;+\infty[) = [-4;+\infty[$.
   $0 \in [-4;+\infty[$ donc l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive u_n.

   b. $f_1(x) = 0 \iff 9x^2 + x - 4 = 0.$
   Le discriminant de ce trinôme est
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 9 \times (-4) = 145 > 0.$
   L'équation admet donc deux solutions réelles $x_1 = \frac{1-\sqrt{145}}{2} < 0$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{145}}{2} > 0$

   Ainsi, $\boxed{u_1 = \frac{1+\sqrt{145}}{2}}$

   $f_2(x) = 0 \iff 10x^2 - 4 = 0 \iff x^2 = \frac{2}{5}.$

   L'unique solution positive est $\boxed{u_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}}$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_n(0) = -4 < 0 = f(u_n)$.
   De plus,
   $f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 9\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 = \left(\frac{2}{3}\right)^n > 0.$
   Ainsi, $f(0) < f(u_n) < f\left(\frac{2}{3}\right)$ donc, par stricte croissance de f_n sur $\mathbb{R}_p$, $0 < u_n < \frac{2}{3}$.

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left]0; \frac{2}{3}\right[}$$

   .

2. a. Soit $x \in]0;1[$, on a : $x^{n+1} = x^n \times x < x^n$ donc $x^{n+1} + 9x^2 - 4 < x^n + 9x^2 - 4$, c'est à dire $f_{n+1}(x) < f_n(x)$.

   $$\boxed{\forall\,]0;1[\,, f_{n+1}(x) < f_n(x).}$$

   b. Comme $u_{n+1} \in \left]0; \frac{2}{3}\right[\subset]0;1[$,
   $f_n(u_{n+1}) > f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$
   donc $\boxed{f_n(u_{n+1}) > 0}$
   Ainsi, $f_n(u_{n+1}) > f_n(u_n)$ donc, par stricte croissance de f_n sur $[0;+\infty[$, $u_{n+1} > u_n$

   $$\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

   c. D'après **2)b.** et **1)c.**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par $\frac{2}{3}$, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge vers un réel } \ell.}$

3. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $0 < u_n < \frac{3}{2}$ donc, par croissance de $x \mapsto x^n$,
   $0^n < u_n^n < \left(\frac{3}{2}\right)^n$.
   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = 0$, le théorème des gendarmes assure

   la convergence de (u_n^n)

   vers 0.

   $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0}$$

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(u_n) = 0$ donc
   $0 = u_n^n + 9u_n^2 - 4$. En passant à la limite, on obtient d'après ce qui précède :
   $0 = 0 + 9\ell^2 - 4$ d'où $\ell = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

   $$\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ell = \frac{2}{3}.}$$