17 T.D. Produits scalaires.

Extension des notions de géométrie euclidienne à l'espace euclidien de dimension n avec la mise en place de deux résultats fondamentaux pour les applications : la projection orthogonale sur un sous-espace d'une part et la diagonalisation des matrices symétriques d'autre part. »

Exemple de capacités : Calculer une projection orthogonale, une plus courte distance.

Exercice préliminaire :

① Déterminer la norme du vecteur $x = (1, -1, 3)$ en utilisant Python.
② Déterminer l'angle (en radian) entre les vecteurs $x = (3, 4)$ et $y = (1, -1)$.
Calculer la distance entre ces deux vecteurs.
③ Écrire une fonction Python `norme` de paramètre d'entrée un vecteur x de type `array` (par exemple : `x=np.array([3,4])`) et qui retourne sa norme.
④ Écrire une fonction `produit_scalaire(x,y)` retournant le produit scalaire des vecteurs x et y.
⑤ Soit deux vecteurs $x = (1, 2, 3)$ et $y = (-1, 0, 8)$. Déterminer l'angle (en rd) entre x et $x - y$.

Exercice 1 : ✶ Orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \text{Vect}\{u_1, \cdots, u_p\}$.
① Montrer que $x \in F^\perp \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], (x|u_i) = 0$.
② On suppose que $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}\{v_1, v_2\}$ où $v_1 = (0, 1, 2, -1)$ et $v_2 = (1, 0, 1, 0)$.
Déterminer un système de deux équations caractérisant $F^\perp$ et en déduire une base orthonormée.

Exercice 2 : ✶

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, déterminer la projection orthogonale de $u = (1, 1, 0)$ sur le plan P d'équation $x + y = z$.

Exercice 3 : ✶✶ Matrice d'une projection orthogonale

Former la matrice, dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ du projecteur orthogonal p sur le sous-espace vectoriel F défini par :

$$F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x + 2y + 3z + 4t & = 0 \\ x + 3y + 5z + 7t & = 0 \end{cases} \right\}$$

Exercice 4 : ✶✶ Projections et distance minimale

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = (x + y - 2)^2 + (2x + y - 1)^2 + (2x + y - 3)^2 + (3x + y - 2)^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer le minimum de f sur $\mathbb{R}^2$ en interprétant $f(x, y)$ comme $\|u - v\|^2$ où $u \in F = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$ qu'on déterminera.

Exercice 5 : Matrices symétriques

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & -4 \\ 1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

① Diagonaliser les matrices symétriques réelles ci-dessus dans une base orthonormée, a et b étant deux réels quelconques.

② Déterminer les matrices carrées X à valeurs réelles positives telle que $X^2 = A$ lorsque $A = A_1$ ou A_2 et qu'il n'en existe pas pour $A = A_3$.

Exercice 6 : projections orthogonales

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique (noté $(.|.)$). Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

On cherche à déterminer si $(x|f(x)) \geq 0$ $(*)$.

① Écrire une fonction Python permettant de tester cette assertion pour 100 vecteurs x pris au hasard dans $\mathbb{R}^3$.

② **a.** Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ (en donner une base) pui démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^3,\ f(x) - x \in \mathrm{Ker}(f)$$

b. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et justifier que $\mathrm{Im}(f)$ est un plan F dont on donnera une équation cartésienne et un vecteur normal.

c. En déduire que f est la projection orthogonale sur F.

③ Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

a. Calculer la distance de x au plan F et en déduire que :

$$\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

b. En déduire également que :

$$-4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 \leq 2x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2$$

c. Peut-on désormais dire si f vérifie $(*)$?

Problème : ✶✶

On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M de coordonnées x, y et z dans l'espace géométrique qui vérifient l'équation :

$$x^2 + 3y^2 - 3z^2 - 8yz + 2zx - 4xy = 1$$

① Étudier l'intersection de $\mathcal{E}$ avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation $y + 2z = 0$ en la décrivant complètement.

② Écrire l'équation (E) sous la forme :

$${}^tX \cdot A \cdot X = 1 \text{ où } X \text{ désigne la matrice colonne } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

et ${}^tX$ sa transposée, en explicitant la matrice A de telle manière qu'elle soit symétrique à coefficients réels.

③ Caractériser le noyau et l'image de l'application linéaire représentée par la matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, en précisant une base de chacun de ces sous-espaces.

④ Déterminer les valeurs propres de A. Pourquoi la matrice A est-elle diagonalisable ?

⑤ Diagonaliser A avec une matrice de passage dont les vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

⑥ Comment s'écrit l'équation (E) dans les coordonnées du nouveau repère ainsi construit ?

⑦ Dessiner l'allure de l'ensemble $\mathcal{E}$. Que représente l'intersection étudiée ?