CORRECTION

Couples de variables aléatoires discrètes

EXERCICE :

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ est la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calcul des puissances de A

1. $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 / AX = \lambda X \Leftrightarrow A - \lambda I_3$ non inversible.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 3 \\ 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 2 \\ 0 & P(\lambda) & 2\lambda-3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (3-\lambda)L_1 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}(U_\lambda)
\end{aligned}$$

où U_λ désigne la réduite de Gauss de $A - \lambda I_3$
et avec

$$P(\lambda) = -2 + \lambda(3-\lambda) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-1)(\lambda-2)$$

D'où : $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Leftrightarrow P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{1, 2\}}$

Déterminons les sous-espaces vectoriels propres associés :

$$X \in E_1 \Leftrightarrow (A - I_3)(X) = 0 \Leftrightarrow U_1 X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z & = 0 \\ -z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = 0 \\ x & = y \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \mathrm{Vect}\{u_1\} \text{ où } u_1 = (1,1,0)}$

$$X \in E_2 \Leftrightarrow (A - 2I_3)(X) = 0 \Leftrightarrow U_2 X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 2z & = 0 \\ z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = 0 \\ x & = 2y \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{E_2 = \text{Vect}\{u_2\} \text{ où } u_2 = (2,1,0)}$

Remarque : on prend soin de vérifier que $AU_1 = U_1$ et $AU_2 = 2U_2$ où $U_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u_i)$.

2. Comme 0 n'est pas valeur propre de A alors A est inversible.
3. On note que $\dim(E_1) + \dim(E_2) = 2 < 3$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

4. Les vecteurs u_1 et u_2 sont ceux obtenus dans la question 1.
On pose $u_3 = (1,1,1)$ et on montre que $\mathcal{C} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $E = \mathbb{R}^3$:

— Montrons d'abord que la famille est libre : Soient x, y, z trois réel.
Si $x\ u_1 + yu_2 + zu_3 = 0$ alors $(x + 2y + z, x + y + z, z) = 0$ donc $z = 0$ et $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$
donc $x = y$ et $3y = 0$ **d'où** finalement $y = x = z = 0$.
Remarque : On est passé par la définition mais on pouvait tout aussi bien montrer :

$$\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$$

— Par ailleurs la famille $\mathcal{C}$ a 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ de dimension 3.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C} \text{ est une base de } E.}$

5. La matrice de passage P de la la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{C}$ est celle qui contient les coordonnées (en colonne) dans la base $\mathcal{B}$ des vecteurs de $\mathcal{C}$.
Comme $\mathcal{B}$ est la base canonique, les coordonnées des vecteurs sont leurs composantes.
Donc $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
La matrice de passage de la base $\mathcal{C}$ à la base $\mathcal{B}$ est l'inverse de P :

$$PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2y' + z' & = x \\ x' + y' + z' & = y \\ z' & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' + 2y' & = x - z \\ x' + y' & = y - z \\ z' & = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' & = 2 - 2z - x + z \\ y' & = x - z - y + z \\ z' & = z \end{cases} \begin{matrix} 2L_2 - L_1 \\ L_1 - L_2 \\ L_3 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' & = -x + 2y - z \\ y' & = x - y \\ z' & = z \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

✐**remarque :** là encore on n'oublie pas de vérifier au brouillon que $PP^{-1} = I$

6. Pour calculer $f(u_3)$, comme on dispose de la matrice de f dans la base canonique, on calcule

ses coordonnées dans cette base :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & -2 & 3\\1 & 0 & 2\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}$$

Donc $f(u_3)$ a pour coordonnées dans la base canonique $(4,3,2)$
Et comme $(4,3,2) = u_2 + 2u_3$.
Conclusion : $\boxed{f(u_3) = u_2 + 2u_3}$

Montrons maintenant que A et T sont semblables, autrement dit que A et T représentent toutes deux l'endomorphisme f dans deux bases distinctes :

La base $\mathcal{C}$ est (u_1, u_2, u_3) est telle que :
$f(u_1) = 1u_1$, donc ses coordonnées dans $\mathcal{C}$ sont $(1,0,0)$
De même $f(u_2) = 2u_2$ donc ses coordonnées dans $\mathcal{C}$ sont $(0,2,0)$
Et enfin on vient de voir que $f(u_3) = u_2 + 2u_3$. Ses coordonnées dans $\mathcal{C}$ sont donc : $(0,1,2)$
Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$ est la matrice :

$$T = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{A \text{ et } T \text{ sont semblables avec } A = PTP^{-1}.}$

7. Par récurrence on a :
   — pour $n = 1$: $T^1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^1 & \alpha_1\\0 & 0 & 2^1\end{pmatrix}$ avec $\alpha_1 = 1$
   — Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^n & \alpha_n\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$ alors
   $T^{n+1} = T.T^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^n & \alpha_n\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^{n+1} & 2\alpha_n + 2^n\\0 & 0 & 2^{n+1}\end{pmatrix}$
   donc avec $\boxed{\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n}$ la relation est bien vérifiée pour T^{n+1}
   — Par récurrence, $T^n = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2^n & \alpha_n\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$ pour tout entier $n \geqslant 1$ avec $\alpha_1 = 1$ et $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n$
8. Par récurrence on a
   — $\alpha_1 = 1 = 1 \cdot 2^{1-1}$
   — Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_n = n2^{n-1}$ alors $\alpha_{n+1} = 2\alpha_n + 2^n = 2n2^{n-1} + 2^n = 2^n(n+1) = (n+1)2^{n+1-1}$
   — Donc pour tout entier $n \geqslant 1$ $\alpha_n = n2^{n-1}$

Finalement pour $n = 0$ on a $A^0 = I$ et pour $n \geqslant 1$: $A^n = PT^nP^{-1}$

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2^n & -2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -1 + 2^{n+1} & 2 - 2^{n+1} & -1 + (n+1)\,2^n \\ -1 + 2^n & 2 - 2^n & -1 + (n+2)\,2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

remarque : on le vérifie pour $n = 1$

PROBLEME : AGRO B 2011

Partie A : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbf{I}_n$

Lu dans le rapport de jury : *« Les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, bien construit, de difficultés variées et de longueur raisonnable.*
*En probabilité, là où elle serait pourtant nécessaire, l'**indépendance** est souvent « **oubliée** ». Plus généralement, quand les candidats emploient un résultat de cours, ou déjà démontré, ils citent rarement les **conditions d'application**.*
*En analyse, les notions de **convergence et d'absolue convergence** ne sont que rarement maîtrisées.*
*Les **études de fonctions simples** sont l'occasion d'erreurs pour un nombre non négligeable de candidats.*
Les quantificateurs ne sont pas rédigés, ou mal assimilés (par exemple en A.1.a)).
Les parties A et B ne pouvaient être correctement traitées qu'en prenant le temps de bien lire l'énoncé, et ainsi éviter de se lancer dans de longs calculs (calculs souvent maladroitement conduits et ne répondant pas toujours à l'intitulé des questions). »

1. a) Si X est à valeurs dans I_n, alors $\mathbb{P}(X = k) = 0$ pour tout $k > n$.

   Dès lors $\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

   $\boxed{g_X \text{ est un polynôme de degré au plus } n \text{ ou encore : } g_X \in \mathbb{R}_n[X]}$.

   $g_X(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X_k) = 1$ par définition d'une variable aléatoire à valeurs dans I_n.

   $$\boxed{g_X(1) = 1}$$

   Par ailleurs, g_X étant un polynôme, on a : $g'_X(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k a_k t^{k-1}$.

   D'où $g'_X(1) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)$.

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats conservent des séries et parlent de polynômes de degré infini.*
On voit des formulations mathématiques fausses. Par exemple, pour tout $k \in I_n$, pour tout x, $g_x(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, quelques résultats fantaisistes, par exemple :

$$g_X(1) = a_0 + a_1 \text{ ou } g_X(t) = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_1)$$

»

b) g_X est un polynôme à coefficients réels. Si g_X est donnée, par unicité des coefficients d'un polynôme, les coefficients a_k sont déterminés de façon unique. Donc la loi de X est connue.

Lu dans le rapport de jury : « *Bien traitée dans* 50% *des copies.* »

2. a) Pour tout réel t, $E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1}t^{Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2})$ car les variables aléatoires Z_1 et Z_2 étant indépendantes, t^{Z_1} et t^{Z_2} sont indépendantes d'après le lemme de coalition. On a bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t)}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de candidats utilisent le résultat donné en début d'énoncé en justifiant son application par l'indépendance de X_1 et X_2 : peu d'entre eux pensent à en déduire l'indépendance de t^{X_1} et t^{X_2}.*
*Quelques candidats justifient l'égalité $\mathbb{E}(t^{X_1}t^{X_2}) = \mathbb{E}(t^{X_1})\mathbb{E}(t^{X_2})$ par la **linéarité** de l'espérance **! !**.* »

b) Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n$. (On a posé $q = 1-p$).

Lu dans le rapport de jury : « *Résultat trouvé dans* 60% *des copies.* »

c) Si Y suit aussi une loi binomiale de paramètres n' et p, et si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X+Y}(t) = (pt+q)^n(pt+q)^{n'} = (pt+q)^{n+n'}$.
On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.
La fonction génératrice caractérise une loi, donc $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.

Lu dans le rapport de jury : « *Résultat trouvé correctement par* 50% *des candidats. Parmi les autres quelques uns se contentent de dire que ce résultat est dans le cours ; d'autres essayent de le retrouver à partir de loi, généralement en finissant par affirmer le résultat.* »

3. a) Si Y suit une loi uniforme sur I', alors $\forall t \in \mathbb{R},\ R(t) = g_Y(t) = \dfrac{1}{11}\displaystyle\sum_{k=2}^{12} t^k = \dfrac{t^2}{11}\sum_{k=0}^{10} t^k$.

   b) $\boxed{\forall t \in \mathbb{R} - \{1\},\ R(t) = \dfrac{t^2}{11} \times \dfrac{1 - t^{11}}{1 - t}.}$
   0 est racine double de ce polynôme.
   Les nombres complexes $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{11}}$ pour k entier entre 1 et 10 sont racines non réelles de R.
   On a trouvé au moins 12 racines (comptées avec leur ordre de multiplicité) de R. Comme le polynôme R est de degré 12, il n'a pas d'autres racines.

   c) $\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X_1}(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)t^k$.
   0 est racine du polynôme g_{X_1}, ce polynôme est divisible par t.
   Il existe donc un polynôme à coefficients réels P tels que $g_{X1}(t) = tP(t)$.
   Le polynôme $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_1 = k)t^k$ étant de degré 6, P est de degré 5.
   De même il existe un polynôme Q de degré 5 tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{6} P(X_2 = k)t^k = tQ(t)$.
   Or X_1 et X_2 sont indépendantes, donc $R(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t) = t^2P(t)Q(t)$.

$$\boxed{R(t) = t^2P(t)Q(t)}$$

   Lu dans le rapport de jury : « *Rarement traitée (15% des candidats).* »

   d) Les racines de P et Q seraient les nombres complexes non réels $\mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{11}}$ pour k entier entre 1 et 10. Ce qui est absurde, car P étant de degré impair, il devrait avoir au moins une racine réelle.

   $\boxed{\text{On ne peut donc pas truquer les dés de manière que la loi de } X_1 + X_2 \text{ soit uniforme sur } I'.}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Question traitée correctement dans quelques très rares copies. Des candidats pensent obtenir la contradiction par des considérations de degrés ; d'autres affirment que les polynômes P et Q étant à coefficients réels ne peuvent pas avoir de racines complexes.* »

Partie B : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans N

1. $\forall t \in [-1, 1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant a_n$.
   La série de terme $\sum a_n$ converge, et sa somme vaut 1.
   Le théorème de comparaison des séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série $\sum a_n t^n$ converge absolument.
   Or la convergence absolue entraîne la convergence.
   Donc $\boxed{g_X \text{ est défini sur } [-1, 1].}$

$g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1$, par définition d'une variable aléatoire.

Lu dans le rapport de jury : « *Question très rarement bien traitée (dix pour cent des candidats montrent correctement l'absolue convergence).* »

La majoration $|a_k t^k| \leq |t^k|$ ne permet de montrer l'absolue convergence que lorsque $|t| < 1$. Le cas $|t| = 1$ doit alors être étudié à part, ce que les candidats remarquent très rarement. La solution la plus rapide consiste à effectuer la majoration $|a_k t^k| \leq a_k$. Quelques candidats se lancent dans des calculs avec les séries !!!

Parmi les erreurs rencontrées dans plusieurs copies, on trouve :

— La série de terme général $a_k|t^k|$ est une série géométrique...
— $\lim\limits_{k\to+\infty} |a_k t^k| = 0$ donc la série est absolument convergente.
— $a_k|t^k|$ est majoré par 1, donc la série est absolument convergente.
— Certains écrivent : $\left|\sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} a_k|t^k|$ pour déduire la convergence de la série.

2. Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in [-1,1]$ les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes et admettent des espérances d'après le 1.
Donc $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$.

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)}$$

3. ***Lu dans le rapport de jury :*** « ***Cette question a permis aux élèves moyens, mais sérieux, de faire la différence.*** »

a) Si X suit une loi géométrique de paramètre p à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, alors
$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1}pt^k = pt\sum_{k=0}^{+\infty}(qt)^k = \dfrac{pt}{1-qt}$, car $|qt| < 1$.

Lu dans le rapport de jury : « *Attention : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Trop de candidats ont commencé la somme à 0. Trop ont oublié ou n'ont pas justifié correctement la convergence de la série géométrique.* »

b) Si X suit une loi Poisson de paramètre λ, alors $\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}t^k = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$.

Lu dans le rapport de jury : « *Souvent bien traitée.* »

Partie C : Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

1. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « $\forall t \in [0,1],\ \psi_n(t) = (f(t))^n$ ».
   - $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie. Sous cette hypothèse, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_{n+1}$ étant indépendantes, $X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes (lemme de coalition). D'après B.2 la fonction génératrice de $X_1 + \cdots + X_n + X_{n+1}$ est $\psi_{n+1} = g_{X_1+\cdots+X_n} \cdot g_{X_{n+1}}$ En utilisant l'hypothèse de récurrence, $\forall t \in [-1,1],\ \psi_{n+1}(t) = (f(t))^n f(t) = (f(t))^{n+1}$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - $\boxed{\text{Par récurrence, } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathcal{P}_n \text{ est vraie.}}$

     ✐ Noter qu'une récurrence n'est pas indispensable et qu'on peut aussi dire que :
     $$\text{Si } n \in I_s^*,\ \psi_n(t) = \mathbb{E}(t^{S_n}) = \mathbb{E}\left(t^{X_1+\cdots+X_n}\right) = \mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^{n} t^{X_k}\right)$$
     Ce qui permet de conclure par application du lemme de coalition qui assure que les t^{X_k} sont indépendantes...

   - Enfin par hypothèse, $S_0 = 0$ donc $\psi_0(t) = g_{S_0}(t) = \mathbb{P}(X = 0)t^0 = 1 = (f(t))^0$.

   - ***Conclusion*** : $\boxed{\forall n \in I_s,\ \psi_n(t) = (f(t))^n}$

     Lu dans le rapport de jury : « 55% *des candidats obtiennent des points sur cette question. Le cas $n = 0$ est oublié dans la plupart des copies. Les récurrences correctes sont trop rares. Dans plusieurs copies on trouve l'erreur suivante :*
     $$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = n\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i = n)$$
     »

2. La variable aléatoire N étant à valeurs dans I_s, la famille $\{(N = n), n \in I_s\}$ est un système complet d'événements. Utilisons la formule des probabilités totales :

   $\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}((Y = k) \cap (N = n))$.

   Or si $(N = n)$ est réalisé, alors $(Y = S_n)$. Donc $\mathbb{P}(Y = k) = \displaystyle\sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}((S_n = k) \cap (N = n))$.

   Lu dans le rapport de jury : « *Traitée convenablement par* 50% *des candidats. On trouve quelques formulations incorrectes : Si $(N = n)$, alors*
   $$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(S_n = k)$$
   »

3. $\forall t \in [-1,1],\ g(t) = g_Y(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(Y = k)t^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} P((S_n = k) \cap (N = n))\right) t^k$

   $g(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} P(S_n = k)P(N = n)\right) t^k$

   car N est indépendante des variables X_n, donc de S_n.

4. Nous sommes confrontés à une série double à termes positifs dont on sait qu'on peut, en cas de convergence, intervertir l'ordre des sommations...
   Pour tout $t \in [-1,1]$, nous avons vu en B.1. que pour tout $n \in I_s$ la série $\sum_{k\geq 0} P(S_n = k)t^k$ est absolument convergente donc convergente.
   Donc la combinaison linéaire $\sum_{n=0}^{s} P(N=n)\left(\sum_{k=0}^{\infty} P(S_n=k)t^k\right)$ est convergente et par interversion des sommes, on a :
   $\sum_{n=0}^{s} P(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n=k)t^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} P(N=n)P(S_n=k)t^k\right) = g(t)$
   Donc $g(t) = \sum_{n=0}^{s} P(N=n)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} P(S_n=k)t^k\right) = \sum_{n=0}^{s} P(N=n)\psi_n(t)$
   Et en utilisant C.1. on obtient :
   $$g(t) = \sum_{n=0}^{s} P(N=n)(f(t))^n = h(f(t))$$
   Ce qui montre que :
   $$\boxed{\forall \in [-1,1],\ g(t) = (h\circ f)(t).}$$
   Lu dans le rapport de jury : « *Le calcul est trouvé par* 40% *des candidats. Mais l'interversion de somme n'est quasiment jamais justifiée.* »

5. On a vu au B.3.a. que $\forall t \in [-1,1],\ f(t) = \dfrac{pt}{1-qt}$ et $h(t) = \dfrac{p't}{1-q't}$.
   $$\text{Donc } g(t) = h(f(t)) = \frac{p'f(t)}{1-q'f(t)} = \frac{p'\dfrac{pt}{1-qt}}{1-q'\dfrac{pt}{1-qt}} = \frac{pp't}{1-(q+q'p)t}.$$
   $$\boxed{g(t) = \frac{pp't}{1-(q+q'p)t}.}$$
   Or $q+q'p = 1-p+(1-p')p = 1-pp'$, donc $g(t) = \dfrac{pp't}{1-(1-pp')t}$. On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre pp'.
   $$\boxed{Y \text{ suit la loi géométrique de paramètre } pp'}$$
   Lu dans le rapport de jury : « *Question traitée par* 15% *des candidats, la plupart du temps de façon correcte.* ***Elle a permis à certains de faire la différence.*** »

Partie D : Multiplication d'une bactérie

1. Si à la génération n il n'y a plus de bactéries, alors à génération $n+1$ il n'y a pas non plus de bactérie.
   L'événement $Y_n = 0$ entraîne l'événement $Y_{n+1} = 0$, donc $x_n \leqslant x_{n+1}$.
   La suite (x_n) est croissante, majorée par 1 (ce sont des probabilités), donc converge.

   Lu dans le rapport de jury : « *Rarement bien traitée. Certains candidats ont essayé dès la première question de calculer x_n : une lecture complète de l'énoncé aurait évité cette perte de temps.*
   L'erreur la plus fréquente a consisté à affirmer : « le nombre de bactéries augmente au fur et à mesure des générations, donc la probabilité de disparition des bactéries diminue dans le temps ». »

2. Y_1 est le nombre de fils de la bactérie de départ. Donc Y_1 suit une loi de Poisson de paramètre λ. Dès lors :
$$x_1 = \mathbb{P}(Y_1 = 0) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!}$$
   et par définition de f :
$$f(x_0) = f(0) = e^{\lambda(x_0-1)} = e^{-\lambda}$$
$$\boxed{x_1 = f(x_0)}$$

   Lu dans le rapport de jury : « *Traitée correctement par* 50% *des candidats.* »

3. Si $Y_1 = 0$, alors $Y_2 = 0$
   Sinon : la bactérie de départ a Y_1 fils qu'on peut numéroter de 1 à Y_1.
   Appelons X_k le nombre de fils du fils numéro k.
   Le nombre de fils de la seconde génération est $Y_2 = X_1 + X_2 + \cdots + X_{Y_1} = S_{Y_1}$
   Par hypothèse les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la même loi que X.
   La variable Y_1 est aussi indépendante des variables $(X_n)_{n\geq 1}$.
   Les hypothèses sont vérifiées pour appliquer la question C.4 dans laquelle nous avons montré que :
$$g_{Y_2} = g_{Y_1} \circ f$$
   Et comme $Y_1 \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a :
   Conclusion : $\boxed{g_{Y_2} = g_{Y_1} \circ f = f \circ f.}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Traitée par plus de* 50% *des candidats. Lorsque cette question est abordée le début est généralement bien traité.* »

4. a) Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$g_{Y_n} = f^n$" (composée n-ème de f).
   - $\mathcal{P}_1$ est vraie.
   - Supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.
     Si $Y_n = 0$, alors $Y_{n+1} = 0$

Sinon : à la génération n il y a Y_n bactéries qu'on peut numéroter de 1 à Y_n.
Appelons X_k le nombre de fils du fils numéro k.
Notons, comme dans le C. $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Le nombre de fils de la $(n+1)$-ème génération est $Y_{n+1} = S_{Y_n}$
Par hypothèse les variables aléatoires $(X_k)_{k\geq 1}$ sont indépendantes et suivent la même loi que X.
Nous avons montré à la question C.4 que alors $g_{Y_{n+1}} = g_{Y_n} \circ f$
En utilisant l'hypothèse de récurrence, $g_{Y_{n+1}} = f^n \circ f = f^{n+1}$.

- $\boxed{\text{Par récurrence, } g_{Y_{n+1}} = f^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.}$

Donc $x_n = g_{Y_n}(0) = f^n(0) = f(f^{n-1}(0)) = f(x_{n-1})$.

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad x_n = f(x_{n-1})}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question difficile.* 10% *des candidats obtiennent* 1/3 *des points de la question.* »

b) Lorsque n tend vers $+\infty$, (x_n) tend vers p.
(x_{n-1}) tend aussi vers p. La fonction f étant continue en p, $(f(x_{n-1}))$ tend vers $f(p)$.
Or $x_n = f(x_{n-1})$, donc par unicité de la limite $p = f(p)$.

$$\boxed{p = f(p).}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La continuité est presque toujours oubliée.* »

5. Soit $\lambda \leqslant 1$.

$\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = f(t) - t = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - t$, $\varphi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - 1$.
$\forall t \in [0,1[, t-1 < 0$ donc $\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} < 1$, donc $\lambda\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} < 1$ et $\varphi' < 0$ sur $[0,1]$.

t	0	1
$\varphi'(t)$	$-$	
φ	$\mathrm{e}^{-\lambda}$ $\searrow$	0

φ est strictement décroissante de $[0,1]$ sur $[0, \mathrm{e}^{-\lambda}]$.
Le seul zéro de φ est 1. Or les zéros de φ sont les point fixes de f, donc nécessairement $p = 1$.

$$\boxed{\text{La probabilité que la bactérie disparaisse est 1}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des horreurs très dommageables ! On aimerait que les étudiants prennent le temps de faire les calculs. Même quand les variations sont correctes, la décroissance stricte est très rarement citée pour justifier que* $p = 1$ »

6. Soit $\lambda > 1$.

a) $\forall t \in]1,+\infty[,\ \theta^{'}(t) = \dfrac{\ln u - 1}{u^2}.$

u	1	e	$+\infty$
$\theta'(t)$	$-$	0	$+$
θ	1	$1-\mathrm{e}^{-1}$	1

D'après le tableau de variations : $\forall u > 1,\ \theta(u) > 0$, donc $\dfrac{\ln u}{u} < 1$.

Conclusion : $\boxed{\forall u > 1,\ \ln u < u}$
et par ailleurs

$$\ln(u) - u < 0 \Leftrightarrow e^{\ln(u)-u} < 1 \Leftrightarrow \boxed{ue^{-u} < 1}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Traitée correctement par* 40% *des candidats.* »

b) $\forall t \in [0,1],\ \varphi(t) = f(t) - t = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - t$, $\varphi^{'}(t) = \lambda\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} - 1$ et $\varphi^{''}(t) = \lambda^2\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} > 0$.
$\varphi^{'}$ est continue, strictement croissante sur $[0,1]$ dans $J = [\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - 1, \lambda - 1]$ donc réalise une bijection entre ces deux intervalles.
On a montré à la question précédente que $\ln\lambda < \lambda$, donc $\lambda < \mathrm{e}^{\lambda}$ et $\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$.
Comme $\lambda - 1 > 0$, 0 est élément de J. $\boxed{\text{Il existe donc un unique } \beta \in]0,1[\text{ tel que } \varphi^{'}(\beta) = 0.}$
$\varphi^{'}$ est négative sur $[0,\beta]$ et positive sur $[\beta,1]$.

t	0	α	β	1
$\varphi'(t)$	$\lambda\mathrm{e}^{-\lambda} - 1 < 0$	$-$	0	$+$
φ	$\mathrm{e}^{-\lambda}$	0		0

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur } [0,\beta] \text{ et strictement croissante sur } [\beta,1].}$

Lu dans le rapport de jury : « *Rarement abordée* »

c) $\varphi(1)$ étant égal à 0, nécessairement $\varphi(\beta) < 0$.
La restriction de φ à $[0,\beta]$ réalise une bijection entre $[0,\beta]$ et $[\varphi(\beta), \mathrm{e}^{-\lambda}]$. Il existe donc un réel unique $\alpha \in]0,\beta[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$. Or $\varphi(\alpha) = 0$ équivaut à $f(\alpha) = \alpha$.
Donc $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in]0,1[\text{ tel que } f(\alpha) = \alpha.}$

d) f est continue strictement croissante de $[0,\alpha]$ dans $[\mathrm{e}^{-\lambda}, \alpha] \subset [0,\alpha]$. Le segment $[0,\alpha]$ est stable par f.
Comme $x_0 = 0$, on montre facilement par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [0,\alpha]$.
La limite de (x_n) est donc élément de $[0,\alpha]$.

Or on a vu que la limite de (x_n) est un point fixe de f. Le seul point fixe de f dans ce segment est α, donc la suite (x_n) tend vers α.

$$\boxed{\text{La probabilité de disparition de la bactérie est } \alpha \text{ qui est strictement inférieur à 1.}}$$

a) *Écrivons une fonction Python* ***poisson(lbd)*** *de paramètre d'entrée le paramètre* $\lambda > 0$ *qui simule la réalisation d'une loi de poisson de paramètre* λ *:* C'est une question de cours... il suffit de modéliser une loi binomiale de paramètres n grand et p petit tels que $\lambda = np$. Une rédaction possible est la suivante :

```python
def poisson(lbd):
    n = 200
    p = lbd/n
    x = 0
    for k in range(n):
        if rdm.random()<p:
            x += 1
    return x
```

b) *Écrivons une fonction* ***tempsExtinction(lbd,nBMax)*** *qui retourne la première génération qui voit disparaître la bactérie si c'est le cas et la valeur nulle si* Y *dépasse une valeur entière* ***nBMax*** *de bactéries au-delà de laquelle on peut considérer que la population ne s'éteindra plus (par exemple* ***nBMax=100*** *semble raisonnable) :*

```python
def tempsExtinction(lbd,YMax=100):
    Y = 1
    n = 0 # génération
    while Y != 0 and Y < YMax:
        nB = 0
        for k in range(Y):
            nB += poisson(lbd)
        Y = nB
        n += 1
    if Y >= YMax:
        return 0 # convention si ne s'éteint pas
    else:
        return n
```

c) *Écrivons une fonction permettant de valider les réponses fournies en 5. et 6.d) :* Il suffit de déterminer la fréquence avec laquelle la fonction précédente retourne 0, soit :

```python
def estimProbaDisparition(m,lbd):
    L = [tempsExtinction(lbd) for k in range(m)]
    return L.count(0)/m
```

Conclusion du rapport de jury

Lu dans le rapport de jury : « *Certains élèves ont, semble-t-il, eu beaucoup de mal à entrer dans le problème et ce en raison d'une lecture trop rapide du sujet. Ils n'ont donc pas pu mettre leurs connaissances à profit.*
Comme les années précédentes, quelques candidats rendent d'excellentes copies. On trouve aussi des copies très faibles. Ce qui donne un ensemble assez hétérogène.
Les correcteurs attendent clarté, concision, lecteur attentive de l'énoncé, bonne connaissance du cours (notamment ici des lois usuelles, de la notion de système complet d'événement ou d'indépendance). Ils attendent évidemment un grand soin dans les calculs élémentaires (partie D), et dans l présentation de la copie.
Rappelons que la malhonnêteté intellectuelle ne trompe pas le lecteur et est lourdement sanctionnée. »