CORRECTION
Applications linéaires et variables aléatoires à densités

Exercice 1 : Algèbre linéaire (oral Agro véto 2017)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on on considère l'endomorphisme f_a de E associé défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

① Écrire en Python une fonction `f_a(x,y,z,a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$ pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ exprimé lui aussi dans la base $\mathcal{B}$.
Il suffit de noter que :

$$f_a(x, y, z) = f_a(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf_a(e_1) + yf_a(e_2) + zf_a(e_3) = (x + z)(ae_1 + e_2 - ae_3)$$

Dès lors, une fonction possible est :

```python
def fa(x,y,z,a):
    return (x+z)*np.array([a,1,-a])
```

② a) *Pour déterminer une base de Im(f_a), on écrit :*

$$\mathrm{Im}(f_a) = \mathrm{Vect}\{f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)\} = \boxed{\mathrm{Vect}\{(a, 1, -a)\}}$$

b) *Montrons que* $(e_2, e_1 - e_3)$ *est une base de Ker(f_a) :* On commence par appliquer la formule du rang

$$\dim(\mathrm{Ker} f_a) = 3 - \mathrm{rg}(f_a) = 3 - 1 = 2$$

avec :

$$f_a(e_2) = 0 \Leftrightarrow e_2 \in \mathrm{Ker}(f_a) \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) \Leftrightarrow f_a(e_1 - e_3) = 0 \Leftrightarrow e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f_a).$$

On en déduit que $\{e_2, e_1 - e_3\}$ est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathrm{Ker}(f_a)$ qui est de dimension 2.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (e_2, e_1 - e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f_a)}$

③ *Écrivons la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculons A^2 :*

Il est immédiat que $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ et donc $A^2 = 0$.

D'où on déduit que $\boxed{f_a \circ f_a = 0}$.

④ On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.

a) *Montrons que* (e'_1, e'_2, e'_3) *est une base de E :*
On commence par noter que $\mathrm{Card}(e'_1, e'_2, e'_3) = 3 = \dim(E)$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de E. Or

$$\mathrm{rg}((e'_1, e'_2, e'_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

b) *Déterminons la matrice A' de f_a dans cette base :* On a

$$f_a(e'_1) = f_a^2(e_1) = 0\,;\ f_a(e'_2) = 0 \text{ car } e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f_a)\,;\ f_a(e'_3) = f_a(e_3) = f_a(e_1) = e'_1$$

Conclusion : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

c) *La matrice A est-elle inversible ?* On a $\mathrm{rg}(A') = 1 < 3$ donc A' est non inversible.
Or A et A' sont semblables car elles représentent la même application linéaire f_a dans deux bases distinctes.
Conclusion : $\boxed{A' \text{ non inversible implique } A \text{ non inversible}}$

⑤ Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) *Justifions que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul :* On écrit

$$B(x) = A - xI_3 = PA'P^{-1} - xPI_3P^{-1} = P(A' - xI_3)P^{-1}$$

Cela établit que $B(x)$ et $A' - xI_3 = \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$ sont semblables.
Or $A' - xI_3$ est inversible pour tout $x \neq 0$. ***Conclusion*** : $\boxed{B(x) \text{ est inversible } \forall x \neq 0}$

b) $(A - xI_3)(A + xI_3) = A^2 - x^2I_3 = -x^2I_3$ soit $B(x)\dfrac{-1}{x^2}(A + xI_3) = I_3$.

Conclusion : $\boxed{B(x) \text{ est inversible et } (B(x))^{-1} = \dfrac{-1}{x^2}(A + xI_3)}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant que $A \cdot I_3 = A = I_3 \cdot A$, on a :

$$(B(x))^n = (A - xI_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k(-x)^{n-k} I_3^{n-k} = \boxed{(-x)^n I_3 + n(-x)^{n-1} A}$$

Problème 1 : Agro A 2010

Lu dans le rapport de jury : « *Commençons par une première remarque sur la rédaction des copies. Dans l'ensemble les copies sont présentées de manière aérée et sont agréables à lire. Les résultats sont souvent mis en valeur ce qui facilite l'évaluation et ne peut que prédisposer le correcteur en faveur du candidat. Mais la rédaction est souvent longue et/ou imprécise.*
Les arguments justes, quand ils sont présents, sont souvent perdus au milieu de phrases inutiles, voire fausses mathématiquement, ce qui peut entraîner une perte de points.
Les réponses se limites aussi parfois à des calculs, l'imprécision des notationns amène à nous demander si le candidat ne travaille par « par habitude » sans réellement comprendre ce qu'il fait.
Les meilleures copies sont loin d'être les plus longues. Le jury tient à rappeler que la plupart des questions du sujet pouvaient être résolues en peu de lignes et encourage vivement les candidats à travailler dans ce sens.
Un début de problème très classique. Des candidats qui montrent des compétences certaines en algèbre mais qui sont dans les 60% qui n'ont pas obtenues les bonnes valeurs de λ, ne font pas grand chose.
Encore une fois, sur un exercice classique comme celui-ci, le jury attend une rédaction qui donne du sens au calcul et pas seulement des lignes de calcul.
La question 3. au caractère théorique marqué, est finalement abordée par une bonne proportion de candidats. Cette partie a confirmé ce que la rédaction souvent douteuse des question 1. et 2. laissait envisager, un manque de compréhension des objets manipulé. La question 4. présentait l'inconvénient d'être après la 3. (mais il est difficile de faire autrement) et donc très peu de candidats s'y aventurent, pour en général ne pas faire grand chose. »

On rappelle que $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et que $M_\lambda = A - \lambda I = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -6\lambda & 3 & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(S_λ) désigne le système homogène associé, à savoir : $M_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

1. **Recherche de sous-espaces vectoriels supplémentaires.**

   a) *Montrons qu'il existe trois valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) n'est pas un système de Cramer* : (S_λ) n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée M_λ n'est pas inversible ou encore si et seulement si $\mathrm{rg}(M_\lambda) < 3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(6(A-\lambda I_3)\right) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4+12\lambda-12\lambda^2 & 0 & -2+6\lambda \\ -2+6\lambda & 0 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-(2-2\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\lambda = 1/3$, alors

$$\mathrm{rg}\left(A - \frac{1}{3}I_3\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{-\dfrac{4}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

- Si $\lambda \neq 1/3$, alors on peut choisir $-2+6\lambda$ comme pivot, ce qui donne

$$\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4+12\lambda-12\lambda^2 & 0 & \boxed{-2+6\lambda} \\ -6+18\lambda-12\lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{matrix}$$

  donc, dans le cas où $\lambda \neq 1/3$, on a

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A - \lambda I_3) < 3 &\iff -6+18\lambda-12\lambda^2 = 0 \\
&\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1/2\cdot
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda) \text{ admet une solution non nulle si } \lambda = \lambda_1 = 1 \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = \dfrac{1}{2} \text{ ou } \lambda = \lambda_3 = \dfrac{1}{3}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussi dans 40% des copies.*
Certaines erreurs ne sont pas de simples fautes de calcul mais témoignent de problèmes profonds de méthodologie. Par les erreurs on retrouve :
- Des calculs de valeurs de λ pour la matrice $6A$, erreur déjà signalée dans les rapports précédents.
- Multiplication de lignes ou colonnes par des coefficients dépendant du paramètre λ sans se préoccuper de sa potentielle annulation.
On pourra déplorer que les candidats ne se posent pas plus de questions quand ils obtiennent 4 valeurs distinctes pour λ. »

b) *Déterminons u_1, u_2 et u_3 tels que $E_{\lambda_i} = Vect\{u_i\}$:*

Déterminons E_1 : D'après la réduite de Gauß obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -6x + \boxed{3y} + 3z = 0 \\ -4x + \boxed{4z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E_1 = \text{Vect}\{u_1\} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}.}$$

Déterminons $E_{1/2}$: D'après la réduite de Gauß obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\left(A - \frac{1}{2}I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} -3x + \boxed{3y} + 3z = 0 \\ -x + \boxed{z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E_{1/2} = \text{Vect}\{u_2\} = \text{Vect}\{(1,0,1)\}}$$

Déterminons $E_{1/3}$: D'après la réduite de Gauß (pour $\lambda = 1/3$) obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\left(A - \frac{1}{3}I_3\right)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + \boxed{3y} + 3z = 0 \\ \boxed{x} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E_{1/3} = \text{Vect}\{u_3\} = \text{Vect}\{(0,-1,1)\}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question dans l'ensemble bien traitée par les candidats qui avaient trouvé les bonnes valeurs de λ.*
On reste surpris par le nombre d'élèves qui trouvent des vecteurs de base qui sont faux, d'autant plus que l'on peut vérifier très rapidement la véracité du calcul obtenu (en effet $(A - \lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow AX = \lambda X$.
Il est aussi fort dommage de trouver des sous-espaces vectoriels réduit à 0_E sans indication qu'il doit y avoir une erreur. »

c) *Montrons que* : $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
Card$\{u_1, u_2, u_3\} = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ donc il est suffisant de montrer que cette famille est libre pour prouver que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. D'après les notations introduites dans l'énoncé, on a :

$$\text{rg}\{u_1,u_2,u_3\} = \text{rg}(P) = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \boxed{1} \end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & \boxed{1} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2+L_3 \\ L_3 \end{matrix}$$
$$= \text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2-L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

D'où rg$\{u_1, u_2, u_3\} = \text{rg}(P) = 3$. Cette famille est libre.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

d) L'expression de la matrice de passage est immédiate. On obtient :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats ont oublié de répondre à cette question bien qu'ayant réponde correctement aux précédentes, perdans bêtement des points.* »

2. **Calcul des puissances successives de A.**

a) *Montrons que P est inversible et calculons P^{-1} :*
P est inversible s'obtient directement comme conséquence de la question 1.c) puisqu'on a montré que $\mathrm{rg}(P) = 3 = \mathrm{ordre}(P)$.
Sinon, on raisonne de la façon suivante : Soit $X = {}^t(x, y, z)$ et $X' = {}^t(x', y', z')$

$$PX = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y & = x' \\ x - z & = y' \\ x + y + z & = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x' - x \\ z = x - y' \\ x + (x' - x) + (x - y') = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -x' + y' + z' \\ y & = 2x' - y' - z' \\ z & = -x' + z' \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique. C'est un système de Cramer et donc P est inversible.

Conclusion : $\boxed{P \text{ inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussie par un tiers des candidats. Les bons calculs sur des matrices P erronées ont été récompensés.*
Encore une fois il n'est pas très long de vérifier que l'inverse calculé est le bon. »

b) C'est une question de cours : $D = P^{-1}AP$ et le calcul donne :

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

c) On montre par une récurrence immédiate que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}}$$

d) *Démontrons que $D^n = P^{-1}A^nP$ pour tout entier naturel n :*

— La relation est vraie pour $n = 0$ puisque $D^0 = I = P^{-1}IP$ et vraie pour $n = 1$ d'après la question 2.b)
— Supposons la vraie pour un entier $n \geq 0$.

— Alors $D^{n+1} = D^n \cdot D = P^{-1}A^nP \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^nIAP = P^{-1}A^{n+1}P$.
Ce qui prouve l'hérédité de cette relation.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}A^nP}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question bien réussie.*
Le jury attendait qu'une récurrence soit rédigée proprement pour donner l'intégralité des points.
Aucun résultat, autre qu'un résultat du cours, ne peut être annoncé sans une réelle preuve. »

e) *Déterminons l'expression de A^n :*
D'après ce qui précède, on obtient en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :
$\forall n \in \mathbb{N},\ PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n$.
Dès lors :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\dfrac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{=D^n} & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} & \underbrace{\dfrac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 3^n & 0 \\ 6^n & 0 & -2^n \\ 6^n & 3^n & 2^n \end{pmatrix}}_{=PD^n} & \underbrace{\dfrac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n + 2\times 3^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n \\ -6^n + 2^n & 6^n & 6^n - 2^n \\ -6^n + 2\times 3^n - 2^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}}_{=PD^nP^{-1}} \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n + 2\times 3^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n \\ -6^n + 2^n & 6^n & 6^n - 2^n \\ -6^n + 2\times 3^n - 2^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}}.$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question trop rarement traitée.*
Certains candidats ne se sont pas donné la peine d'effectuer les produits matriciels. »

3. **Étude d'une suite matricielle**

Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Nous définissons la suite matricielle $(X_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B. \end{cases}$$

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Considérons les endomorphismes a et b de E définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$.

a) *Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$. Démontrer que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.*

Soit ℓ l'endomorphisme de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) = L$. La relation matricielle $L = AL + B$ nous dit que $\ell = a \circ \ell + b$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(b)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = b(x)$. Comme $b = \ell - a \circ \ell$, on en déduit que $y = (\ell - a\circ\ell)(x) = (id_E - a)\big(\ell(x)\big)$, ce qui démontre que $y \in \mathrm{Im}(id_E - a)$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a).}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussie dans* 10% *des copies.*
L'erreur la plus fréquente est d'écrire $L = AL + B$ si, et seulement si $L(I - A) = B$, au lieu de $(I - A)L = B$.
Beaucoup d'élèves concluent quand même après avoir commis cette erreur, ce qui constitue en soi une seconde faute ! »

b) On suppose à nouveau qu'il existe $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

i. Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

— *Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$. Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n. En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.*

En soustrayant les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B$ et $L = AL + B$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} - L = A(X_n - L)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_{n+1} = AY_n.}$$

La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est alors une suite matricielle géométrique, ce qui permet de conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}(n) : \qquad Y_n = A^n Y_0.$$

Démontrons ce prédicat par récurrence.
Initialisation : On a $A^0 Y_0 = I_3 Y_0 = Y_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$Y_{n+1} = AY_n = A\,A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0,$$

où la deuxième égalité découle de $\mathcal{P}(n)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_n = A^n Y_0.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Le jury attendait ensuite pour la formule du terme général Y_n que la récurrence soit rédigée et non juste une analogie avec une suite géométrique.*
A noter que l'analogie est souvent faite sans réfléchir obtenant comme résultat $Y_n = Y_0 A^n$ au lieu de $Y_n = A^n Y_0$ »

ii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

En combinant les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^n Y_0$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n(X_0 - L) + L.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Les erreurs de la question précédente se sont répercutées sur celle-ci.* »

4. **Un exemple**. Dans cette question, nous admettons la réciproque de la question 3.a), soit :

$$\exists L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/L = AL + B \Leftrightarrow \operatorname{Im}(b) \subset \operatorname{Im}(id_E - a)$$

Nous choisissons par ailleurs :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) *Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$. Démontrer que pour qu'un vecteur v, de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$, appartienne à $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.*

$$\begin{aligned}
& \text{on a } v \in \operatorname{Im}(id - a) \\
\iff\ & \exists u = (\alpha, \beta, \gamma) \in E, \quad \vec{v} = (id_E - a)(u) \\
\iff\ & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (Id_E - A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
\iff\ & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
\iff\ & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6\alpha \ \boxed{-3\beta} - 3\gamma = 6x & L_1 \\ 4\alpha \ - 4\gamma = 6y & L_2 \\ 2\alpha - 3\beta + \gamma = 6z & L_3 \end{cases} \\
\iff\ & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6\alpha \ \boxed{-3\beta} - 3\gamma = 6x & L_1 \\ \boxed{4\alpha} \ - 4\gamma = 6y & L_2 \\ -4\alpha \ + 4\gamma = -6x + 6z & L_3 - L_1 \longrightarrow L_3 \end{cases} \\
\iff\ & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6\alpha \ \boxed{-3b} - 3\gamma = 6x & L_1 \\ \boxed{4a} \ - 4\gamma = 6y & L_2 \\ 0 = -6x + 6y + 6z & L_3 + L_2 \longrightarrow L_3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Or un système admet au moins une solution si, et seulement si, toutes ses équations sont satisfaites, donc

$$v \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \iff -6x + 6y + 6z = 0,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\text{un vecteur } v, \text{ de composantes } (x, y, z) \text{ dans } \mathcal{B}, \text{ appartient à } \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \text{ si, et seulement si, on a } x - y - z = 0.}$$

✐ **Autre méthode :** On demande de montrer que $\operatorname{Im}(I_3 - A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$

Déterminons $\Im(I_3 - A)$:
On commence par noter que $\operatorname{rg}(I_3 - A) = 2$, ce qui est immédiat puisque la colonne C_1 est l'opposée

de la somme des deux dernières colonnes, c'est-à-dire : $C_1 = -(C_2 + C_3)$ ou $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
Donc, puisque l'image est engendrée par l'image de la base canonique de départ :

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}(id_E - a) &= \mathrm{Vect}\{(id_E - a)(e_1), (id_E - a)(e_2), (id_E - a)(e_3)\}\\ &= \mathrm{Vect}\{(id_E - a)(e_1), (id_E - a)(e_2)\} = \mathrm{Vect}\{(1, 2/3, 1/3), (-1/2, 0, -1/2)\}\\ &= \mathrm{Vect}\{(3, 2, 1), (1, 0, 1)\} \text{ en prenant des vecteurs colinéaires}\end{aligned}$$

En conséquence :

$$\begin{aligned}(x, y, z) \in \mathrm{Im}(id_E - a) &\Leftrightarrow rg\begin{pmatrix}3 & 1 & x\\ 2 & 0 & y\\ 1 & 1 & z\end{pmatrix} = 2\\ &\Leftrightarrow rg\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 0 & -2 & 3y-2x\\ 0 & 2 & 3z-x\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ 3L_2-2L_1\\ 3L_3-L_1\end{matrix} = rg\begin{pmatrix}1 & 2 & x\\ 0 & -2 & 3y-2x\\ 0 & 0 & 3z+3y-3x\end{pmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3+L_2\end{matrix} = 2\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(x, y, z) \in \mathrm{Im}(id_E - a) \Leftrightarrow x - y - z = 0}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question peu abordée. Certains candidats qui posent correctement un système pour calculer Im$(id - a)$ et qui appliquent correctement la méthode du pivot concluent qu'un système 3×3 est équivalent à la relation donnée dans la question.*
Le jury aurait apprécié d'avoir plus souvent une rédaction précise. »

b) *Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

Soit b l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$. Pour justifier l'existence de la matrice L, la remarque en introduction de cette question nous assure qu'il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.

Comme $\big(b(e_1), b(e_2), b(e_3)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, b$, il suffit donc de vérifier que les vecteurs $b(e_1)$, $b(e_2)$ et $b(e_3)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Or les colonnes de la matrice B sont les composantes de $b(e_1)$, $b(e_2)$ et $b(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$, donc il suffit de vérifier que les composantes de ces colonnes satisfont l'équation cartésienne $x - y - z = 0$ de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Et il est clair que

$$3 - 1 - 2 = 0, \qquad -1 - 0 - (-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad -2 - (-1) - (-1) = 0,$$

donc $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.

En conclusion, il est licite d'utiliser le résultat de la question 3. a) γ] pour affirmer qu'

$$\boxed{\text{il existe } L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } L = AL + B.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Ici il suffisait de vérifier l'inclusion Im$(b) \subset$ Im$(id - a)$, c'est-à-dire vérifier qu'un vecteur $y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = b(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$ vérifie $y_1 - y_2 - y_3 = 0$. La question n'est presque jamais traitée. Rares même sont les candidats ayant pensé à s'intéresser à l'image de b.* »

c) *Déterminer une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$. On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls. À partir de cette matrice L', déterminer une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

On a

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}^{=B} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=P} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}BP} \end{array}$$

Si l'on pose

$$L' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$(I_3 - D)L' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} & L' = DL' + P^{-1}BP \\ \iff \quad & (I_3 - D)L' = P^{-1}BP \\ \iff \quad & \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \iff \quad & d = g = h = 0, \quad e = 2, \quad f = -2 \quad \text{et} \quad i = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

On constate qu'il n'existe aucune condition sur a, b et c pour avoir $L' = DL' + P^{-1}BP$, ce qui signifie que l'on peut les choisir librement dans $\mathbb{R}$. Pour faire simple, on prend $a = b = c = 0$. Avec ce choix, on obtient

$$\boxed{L' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Multiplions la relation $L' = DL' + P^{-1}BP$ par P à gauche et par P^{-1} à droite, ce qui donne

$$PL'P^{-1} = PDL'P^{-1} + B.$$

Or $AP = PD$ d'après la formule de diagonalisation de la question 1. c), donc

$$PL'P^{-1} = APL'P^{-1} + B,$$

ce qui montre que l'on peut prendre

$$L = PL'P^{-1}.$$

Or

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^{=L'} \\ \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{=PL'} \end{array} \quad \begin{array}{c} \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=P^{-1}} \\ \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}}_{=PL'P^{-1}} \end{array}$$

donc

$$\boxed{\text{on peut prendre } L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question peu difficile, les matrices ayant été conçues pour posséder beaucoup de* 0*. Probablement pressés par le temps, même les meilleures copies se sont adonnées au jeu de faire commuter des matrices qui ne commutent pas.*
Ainsi 1%*, seulement des candidats ont obtenu* L'*, personne n'a ensuite calculé* L*.* »

d) *Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Déterminons l'expression de la limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$:*

Le résultat de la question 3. b) nous dit que $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

En passant à la limite, on obtient : $\underset{n\to\infty}{lim} X_n = \underset{n\to\infty}{lim}(A^n)(X_0 - L) + L$
On trouve alors que :

$$\boxed{\underset{n\to\infty}{lim} X_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}(X_0 - L) + L}$$

Problème 2 : D'après Agro B 2015

Lu dans le rapport de jury : « *Ce problème était un exercice d'analyse plus que de probabilités, beaucoup de questions demandant de calculer des intégrales, parfois sur es intervalles non fermés, bornés. Les définitions du cours de probabilités étaient quand même nécessaires (et ont souvent fait défaut) et ce dès la première question.* »

① ✐ On peut commencer par noter que si $\alpha = 1$, alors $l_{\alpha,r}(t)$ vaut $1/r$ sur l'intervalle $]0, r[$ et 0 sinon. Il s'agit d'une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$, celle de la loi uniforme sur $]0, r[$.

Plus généralement, on commence par dire que $l_{\alpha,r}$ est **positive** sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Ensuite, pour la **continuité**, elle est trivialement continue sur $]-\infty, 0]$ et sur $[r, +\infty[$ puisque nulle sur ces intervalles de $\mathbb{R}$ et continue sur $]0, r[$ puisque $t \longmapsto t^{\alpha-1}$ est continue sur $]0, r[$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$. Dès lors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $l_{\alpha,r}$ est **continue par morceaux sur** $\mathbb{R}$ ou encore $l_{\alpha,r}$ **est continue sur** $\mathbb{R}\backslash\{0, r\}$**.**

Si on veut prolonger cette réponse (ce qui n'est pas indispensable), on pourra dire que $l_{\alpha,r}$ n'est jamais continue en r puisque, pour tout $\alpha > 0$, $\underset{t\to r^-}{lim}\, l_{\alpha,r}(t) = \dfrac{\alpha}{r} \neq 0 = l_{\alpha,r}(r)$ mais que la continuité en 0 dépend des valeurs de α :

— Si $\alpha > 1$ alors $\underset{t\to 0}{lim} t^{\alpha-1} = 0$ et donc $\underset{t\to 0^+}{lim}\, l_{\alpha,r}(t) = 0 = l_{\alpha,r}(0)$. $\boxed{l_{\alpha,r} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{r\}}$.
— Si $0 < \alpha < 1$, $\underset{t\to 0}{lim} t^{\alpha-1} = +\infty$ donc $\underset{t\to 0}{lim} l_{\alpha,r} = +\infty \neq l_{\lambda,r}(0)$. $\boxed{l_{\alpha,r} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{0, r\}}$.
— si $\alpha = 1$, alors $l_{\alpha,r}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, r\}$ (cf la loi uniforme sur $]0, 1[$...)

Pour montrer que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} l_{\alpha,r}(t)dt$ converge et vaut 1, on commence par appliquer la relation de Chasles. Alors :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} l_{\alpha,r}(t)dt = \frac{\alpha}{r^\alpha}\int_0^r t^{\alpha-1}dt = \frac{\alpha}{r^\alpha}\int_0^r \frac{1}{t^{1-\alpha}}dt.$$

Cette intégrale est une intégrale généralisée en 0 si $0 < \alpha < 1$ et une intégrale définie si $\alpha \geq 1$.
Dans tous les cas, on peut dire que c'est une intégrale de Riemann, qui converge si et seulement si $1 - \alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > 0$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} l_{\alpha,r}(t)dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

Prenons donc $\alpha > 0$. On peut dire de façon générale que pour $\varepsilon > 0$:

$$I(\varepsilon) = \int_\varepsilon^r t^{\alpha-1}dt = \Big[\frac{t^\alpha}{\alpha}\Big]_\varepsilon^r = \frac{r^\alpha - \varepsilon^\alpha}{\alpha}.$$

Puisque $\alpha > 0$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+} I(\varepsilon) = \frac{r^\alpha}{\alpha}$.

Ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} l_{\alpha,r}(t)dt$ converge lorsque $\alpha > 0$ et : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} l_{\alpha,r}(t)dt = \frac{\alpha}{r^\alpha} \times \frac{r^\alpha}{\alpha} = 1$.

En conclusion : $\boxed{l_{\alpha,r} \text{ est une densité de probabilité si et seulement si } \alpha > 0.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Il y a trois axiomes à vérifier pour démontrer que $l_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité : sa continuité par morceaux sur $\mathbb{R}$, le fait qu'elle est positive, et enfin que son intégrale sur $]-\infty, +\infty[$ converge et vaut 1. Les trois points ontn été vérifiés de manière totalement*

aléatoire par les candidats, ce qui montre qu'ils connaissent mal la définition.
Concernant chacun des points : le plus délicat à vérifier est le calcul de l'intégrale, qui demande de fixer d'abord une borne finie A, puis de la faire tendre vers 0. Beaucoup de candidats n'ont pas vu que pour certaines valeurs de α, la fonction n'était pas continue sur $\mathbb{R}$, avec une limite infinie en 0^+.
Enfin le si et seulement si indiquant une équivalence, a posé de nombreux problèmes de rédaction, les candidats semblant pour bon nombre d'entre eux mal à l'aise avec la logique élémentaire, ou en tous cas ayant du mal à retranscrire convenablement les arguments à l'écrit. »

Maintenant $X \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, r)$, ce qui signifie que X a pour densité $l_{\alpha,r}$.

② a) Soit $x \in]0, r[$.

$$F(x) = \frac{\alpha}{r^\alpha} \int_0^x t^{\alpha-1} dt = \frac{x^\alpha}{r^\alpha} \text{(on a déjà montré la convergence...)}$$

Et puisque $X(\Omega) =]0, r[$ il est immédiat que $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.
En résumé :

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \dfrac{x^\alpha}{r^\alpha} & \text{si } 0 < x < r, \\ 1 & \text{si } r \leq x. \end{cases}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Pour la fonction de répartition, on a à nouveau besoin de calculer une intégrale sur un intervalle non compact. Certains candidats dérivent la densité (qui rappelons-le n'est pas continue lorsque $\alpha \in]0, 1[$) pour obtenir le résultat, ce qui évidemment ne donne rien de bon ; mais ce qui est remarquablement incohérent, c'est que dans une question ultérieure, les mêmes vont à nouveau dériver, cette fois-ci la fonction de répartition pour obtenir la densité.*
Dans quelques copies, on trouve :

$$\int_{-\infty}^t \alpha \frac{s^{\alpha-1}}{r^\alpha} ds$$

ce qui n'a évidemment aucun sens puisque $l_{\alpha,r}(s)$ n'a l'expression utilisée ci-dessus comme intégrande que lorsque $s \in]0, r[$; et même lorsque le calcul est bien rédigé, la réponse est peu rigoureuse : l'expression de F_X s'obtient en distinguant trois cas, on ne peut pas conclure (et encadrer) $F_X(t) = \left(\frac{t}{r}\right)^\alpha$ sans rien préciser d'autre : cette expression ne saurait quoi qu'il arrive être valable sur $\mathbb{R}$ tout entier, vues les propriétés de la fonction de répartition. »

b) $\boxed{P(X \leq 0) = F(0) = 0.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Que vaut $\mathbb{P}(X \leq 0)$? Eh bien elle vaut 0, ce qu'on obtient avec la formule trouvée pour F_X ou bien en remarquant que le support de X est contenu dans $]0, +\infty[$ d'après la fonction densité.* »

c) Posons $W = -\ln\left(\dfrac{X}{r}\right)$.
Puisque $X(\Omega) =]0, r[$ (*on peut aussi utiliser la question précédente si on veut vraiment suivre la logique de l'énoncé*), W est bien définie et $W(\Omega) =]0, +\infty[$. Soit $t \in]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P(W \leq t) = P\Big(\ln\left(\frac{X}{r}\right) \geq -t\Big) \\ &= P\Big(\frac{X}{r} \geq e^{-t}\Big) = P\big(X \geq re^{-t}\big) = 1 - F(re^{-t}). \end{aligned}$$

Or $t>0$ donc $re^{-t}\in]0,r[$, donc :

$$\forall t>0,\ \ F_W(t)=1-\left(\frac{re^{-t}}{r}\right)^\alpha=1-e^{-\alpha t}.$$

On reconnait la loi exponentielle :

$$\boxed{W\hookrightarrow\mathcal{E}(\alpha).}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Dans cette question, la conclusion est souvent juste, mais on remarque le même manque de rigueur dans les écritures intermédiaires : la densité de W n'est pas :*

$$f_W(t)=1-e^{-\alpha t}$$

mais bien

$$f_W(t)=\begin{cases}1-e^{-\alpha t} & si\ t\geq 0\\ 0 & sinon\end{cases}$$

Toujours concernant la rédaction, on ne peut passer directement de la fonction de répartition à la densité : ayant obtenu F_W, on constate que celle -ci est continûment dérivable par morceaux sur $\mathbb{R}$. On en déduit alors que W est une variable à densité, et que la densité s'obtient en dérivant (chaque morceaux) de F_W »

③ Ici $U_1\hookrightarrow\mathcal{E}(\lambda)$, $U_2\hookrightarrow\mathcal{E}(\mu)$, U_1 et U_2 sont indépendantes.

a) Posons $Y=-U_2$. Alors $Y(\Omega)=]-\infty,0[$. Soit $t<0$:

$$F_Y(t)=P(-U_2\leq t)=P(U_2\geq -t)=1-F_{U_2}(-t)=1-(1-e^{\mu t})=e^{\mu t}.$$

Ainsi :

$$F_Y(t)=\begin{cases}e^{\mu t} & \text{si } t<0,\\ 1 & \text{si } t\geq 0.\end{cases}$$

La fonction F_Y est de classe C^1 (et donc continue) sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$. De plus F_Y est continue en 0 car $\lim\limits_{t\to 0^-}F_Y(t)=e^0=1$, $F_Y(0)=1$, et $\lim\limits_{t\to 0^+}F_Y(t)=1$. Ainsi F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Donc Y est bien une variable à densité.

$$\boxed{\text{Une densité de } Y \text{ est : } f_Y(t)=\begin{cases}\mu e^{\mu t} & \text{si } t<0,\\ 0 & \text{si } t\geq 0.\end{cases}}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Il faut ici faire un calcul et ne surtout pas appliquer un faux argument de transformation affine, menant dans quelques copies à la densité négative (sic) $-f_{U_2}$. Encore une fois, répétons aux candidats de prendre garde au sens de ce qu'ils écrivent, un signe $-$ devant une densité devrait faire trembler leur poigner au moment où la pointe de leur stylo s'apprête à le tracer. »*

b) On a : $U_1-U_2=U_1+Y$. De plus U_1 et Y sont indépendantes, on peut donc appliquer la formule du produit de convolution : pour tout réel t, en notant $g_{\lambda,\mu}$ la densité de U_1-U_2 :

$$g_{\lambda,\mu}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_{U_1}(u)f_Y(t-u)du.$$

Pour les bornes : $f_{U_1}(u)f_Y(t-u)\neq 0\Leftrightarrow u>0$ et $t-u<0\Leftrightarrow u>0$ et $u>t$.
Pour continuer il faut donc savoir si t est positif ou pas.

- Premier cas : $t>0$. Alors : $u>0$ et $u>t \Leftrightarrow u>t$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
g_{\lambda,\mu}(t) &= \int_t^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u}\mu e^{\mu(t-u)}du = \lambda\mu e^{\mu t}\int_t^{+\infty} e^{-(\lambda+\mu)u}du \\
&= \lambda\mu e^{\mu t}\lim_{A\to+\infty}\big[\frac{e^{-(\lambda+\mu)u}}{-(\lambda+\mu)}\big]_t^A = \lambda\mu e^{\mu t}\lim_{A\to+\infty}\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}-e^{-(\lambda+\mu)A}}{\lambda+\mu} \\
&= \lambda\mu e^{\mu t}\frac{e^{-(\lambda+\mu)t}}{\lambda+\mu} = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda t}.
\end{aligned}$$

- Second cas : $t\leq 0$. Alors : $u>0$ et $u>t \Leftrightarrow u>0$. Ainsi :

$$g_{\lambda,\mu}(t) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda u}\mu e^{\mu(t-u)}du = \lambda\mu e^{\mu t}\lim_{A\to+\infty}\big[\frac{e^{-(\lambda+\mu)u}}{-(\lambda+\mu)}\big]_0^A = \lambda\mu e^{\mu t}\frac{1}{\lambda+\mu}.$$

En conclusion :

$$\boxed{g_{\lambda,\mu}(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda t} & \text{si } t>0, \\ \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}e^{\mu t} & \text{si } t\leq 0. \end{cases}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Voici la première d'un doublet de questions calculatoires. Ceux qui l'ont abordée sérieusement l'ont en général bien menée, et obtiennent le bon résultat. Mais bien trop souvent la rédaction s'arrête après une ré-écriture de la formule rappelée dans l'énoncé, certains candidats n'allant même pas jusqu'à substituer les expressions de f_{U_2} et f_{-U_2}. A titre de comparaison, les calculs de ce problème d'analyse sont globalement bien moins maîtrisées que les questions calculatoires d'algèbre linéaire du premier exercice.* »

c) Ici $X \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha,r)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{L}(\beta,s)$, X et Y sont indépendantes.
On notera $W_1 = -\ln\big(\frac{X}{r}\big)$ et $W_2 = -\ln\big(\frac{Y}{s}\big)$.
Alors d'après la question (2.3) : $W_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\alpha)$ et : $W_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\beta)$.
Par ailleurs on pose $Z = -\ln\Big(\frac{sX}{rY}\Big)$.
Pour faire le lien avec les questions qui precèdent on remarque que :

$$Z = -\ln\big(\frac{X}{r}\big) + \ln\big(\frac{Y}{s}\big) = W_1 - W_2.$$

Or W_1 et W_2 sont des variables exponentielles indépendantes, donc on peut appliquer le résultat de (3.2) qui donne la densité de Z :

$$\boxed{g_Z(t) = g_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}e^{-\alpha t} & \text{si } t>0, \\ \dfrac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}e^{\beta t} & \text{si } t\leq 0. \end{cases}}$$

On a alors (on utilise le fait que toutes les quantités présentes sont strictement positives) :

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= P\big(\frac{X}{Y}<1\big) = P\big(\frac{sX}{rY}<\frac{s}{r}\big) \\
&= P\Big(-\ln\big(\frac{sX}{rY}\big) > -\ln\big(\frac{s}{r}\big)\Big) = \int_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{+\infty} g_Z(t)dt.
\end{aligned}$$

Pour continuer il faut connaitre le signe de la borne inférieure de l'intégrale, d'où les deux cas qui suivent :

- Premier cas : $s < r$.
Alors $-\ln\big(\frac{s}{r}\big) > 0$ puis :

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= \int_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} dt = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \lim_{A\to+\infty} \big[-e^{-\alpha t}\big]_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{A} \\
&= \frac{\beta}{\alpha+\beta} e^{\alpha\ln\left(\frac{s}{r}\right)} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\Big(\frac{s}{r}\Big)^{\alpha}.
\end{aligned}$$

- Second cas : $s \geq r$.
Alors $-\ln\big(\frac{s}{r}\big) \leq 0$ puis, avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
P(X<Y) &= \int_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{0} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{\beta t} dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} e^{-\alpha t} dt \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\big[e^{\beta t}\big]_{-\ln\left(\frac{s}{r}\right)}^{0} + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \lim_{A\to+\infty} \big[-e^{-\alpha t}\big]_0^A \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\big(1 - e^{-\beta\ln\left(\frac{s}{r}\right)}\big) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big(1 - \Big(\frac{r}{s}\Big)^{\beta}\Big) + \frac{\beta}{\alpha+\beta} \\
&= \frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big(\frac{r}{s}\Big)^{\beta} \\
&= 1 - \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big(\frac{r}{s}\Big)^{\beta}.
\end{aligned}$$

Pour conclure on a bien le résultat demandé :

$$\boxed{P(X<Y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\Big(\dfrac{s}{r}\Big)^{\alpha} & \text{si } s<r \\ 1 - \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\Big(\dfrac{r}{s}\Big)^{\beta} & \text{si } s \geq r \end{cases}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Le point clé de cette question était d'écrire :*

$$-\ln\left(\frac{sX}{rY}\right) = \ln\left(\frac{Y}{s}\right) - \ln\left(\frac{X}{r}\right)$$

ce qui demande de connaître les propriétés algébiques du logarithme. Celles-ci, pourtant vues en classe de Terminale, ne sont toujours pas maîtrisées par un nombre non négligeable de candidats »

④

a) $P_M(R)$ est la probabilité que X soit inférieur à Y en sachant que le sujet est atteint de la maladie H. On sait alors que $\alpha = 4, \beta = 2, r = 400, s = 800$. En appliquant le dernier résultat de (3.3) (on est dans le cas $s \geq r$) :

$$P_M(R) = 1 - \frac{4}{4+2}\Big(\frac{400}{800}\Big)^2 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Pour $P_{\overline{M}}(R)$ on applique encore (3.3) avec $\alpha = 2, \beta = 3, r = 100, s = 50$ (on a alors $s < r$) :

$$P_{\overline{M}}(R) = \frac{3}{2+3}\Big(\frac{50}{100}\Big)^2 = \frac{3}{20}.$$

En conclusion :

$$\boxed{P_M(R) = \frac{5}{6}.} \qquad \boxed{P_{\overline{M}}(R) = \frac{3}{20}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La fin du sujet dissimulait deux questions faciles, que tous les candidats n'ont malheureusement pas pensé à aller voir (car lorsque M est réalisé, c'est-à-dire lorsqu le sujet est malade, on a $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $r = 400$ et $s = 800$, ce qui en particulier indique qu'on est dans le cas $r \leq s$ pour appliquer la formule de la question précédente).*
Arrêtons-nous sur deux remarques : la première c'est que la calculatrice était autorisée et qu'il est donc absolument impardonnable de faire une erreur de calcul sur ces fractions (et il y en a eu). La seconde, c'est que sur le nombre malgré tout important de candidats ayant abordé la question, beaucoup n'ont pas réussi à substituer les valeurs des quatre paramètres ; certains n'ont même pas su comment remplacer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_M(R)$. Il est indéniable que ce qui a posé problème à certains, c'est la compréhension de l'énoncé, et le lien entre les phrases et les calculs à faire ? Il paraît ***essentiel*** *de travailler sur ce point : faire le lien entre une situation concrète et une mise en équation est à la base de l'activité scientifique.* »

b) On nous donne $P(M) = \dfrac{1}{40}$ et on cherche $P_R(M)$. Avec la formule de Bayes :

$$P_R(M) = \frac{P(M) \times P_M(R)}{P(R)} = \frac{P(M) \times P_M(R)}{P(M) \times P_M(R) + P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(R)}.$$

On passe à l'application numérique :

$$P_R(M) = \frac{\frac{1}{40} \times \frac{5}{6}}{\frac{1}{40} \times \frac{5}{6} + \frac{39}{40} \times \frac{3}{20}} = \frac{50}{50 + 39 \times 9} = \frac{50}{401}.$$

$$\boxed{P_R(M) \approx \frac{1}{8} \approx 0.125.}$$

Ainsi il y a seulement une 'chance' sur huit que l'individu soit réellement malade lorsque son test est positif.
Par conséquent, $\boxed{\text{cette méthode de test est très mauvaise.}}$

Lu dans le rapport de jury : « *On doit ici utiliser deux formules. D'abord la définition des probabilités conditionnelles :*

$$\mathbb{P}_R(M) = \frac{\mathbb{P}(M \cap R}{\mathbb{P}(R)} = \frac{\mathbb{P}_M(R)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(R)}$$

et la formule des probabilités totales pour calculer :

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(R \cap M) + \mathbb{P}(R \cap \overline{M}) = \mathbb{P}_M(R)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(R)\mathbb{P}(\overline{M}) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{40} + \frac{3}{20} \times \frac{39}{40} = \frac{401}{2400}$$

D'où on déduit que :

$$\mathbb{P}_R(M) \approx 0.12$$

On peut aussi appliquer directement le théorème de Bayes (tel que dans la correction ci-dessus) à condition de ne pas écrire n'importe quoi au dénominateur (on a trouvé, parfois, le dénominateur $\mathbb{P}_M(R) + \mathbb{P}_{\overline{M}}(R)$). Certains candidats ont opté pour cette alternative, et sont parvenus au bon résultat, alors qu'ils n'ont pas su faire la question précédente ; et pourtant, ce faisant, ils ont donc trouvé (à leur insu) les réponses à celle-ci.
On a fait le calcul ci-dessus pour commenter la valeur trouvée (c'était la dernière question du sujet, là aussi quelques candidats n'ont pas vu qu'il y avait deux questions en une) ; le test détecte peut-être cinq malades sur six (c'est le résultat de la question précédente) mais lorsqu'il est positif, il s'agit dans 88% de cas d'un individu qui n'est en fait pas malade : ce test est inutilisable. Un nombre finalement assez restreint de candidats ont osé tirer cette conclusion ; parmi les autres, certains ont été jusqu'à écrire qu'ils « avaient dû faire une erreur quelque part ». Il faut avoir confiance en ses résultats, sans compter qu'ici, le calcul est suffisamment court pour pouvoir le relire et trouver si une erreur s'y est glissée. »