# Mouvement brownien :

## 1 Problème : Mouvement brownien

### Introduction :

Le phénomène appelé mouvement brownien a été observé pour la première fois en 1828 par le botaniste écossais Robert Brown au cours d'une étude portant sur le processus de fertilisation d'une nouvelle espèce de fleur. Brown observa au microscope que les grains de pollen de cette fleur, en suspension dans l'eau au repos, étaient animés d'un mouvement désordonné rapide (qui fut appelé mouvement brownien, ou diffusion). Brown attribua ce mouvement aux chocs de la particule de pollen avec les molécules de l'eau au niveau microscopique. En effet, bien que l'eau soit au repos, les molécules d'eau sont agitées de façon très désordonnées à leur échelle. Ses observations suggéraient plusieurs propriétés de ce mouvement :

— $(H_1)$ : Il est incessant et très irrégulier.

— $(H_2)$ : Le mouvement passé d'une particule n'a aucune influence sur le mouvement présent et futur.

### Modélisation :

*Notation :* Un vecteur aléatoire $Z$ de $\mathbb{R}^2$ est un couple $Z = (X, Y)$ de variables aléatoires réelles.

On se propose de modéliser la trajectoire $M$ du mouvement brownien de la façon suivante. On suppose qu'à l'instant initial, la particule de pollen est à la position $M_0$ dans le plan muni de son repère $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Elle subit un choc par une molécule d'eau à chaque temps entier $n \in \mathbb{N}$ (dans une échelle de temps très petite), de sorte que la position $M_{n+1}$ de la particule de pollen au temps $n+1$ est donnée par :

$$M_{n+1} = M_n + Z_n, \forall n \geq 0$$

où $(Z_n)_{n\geq 0}$ est une suite de vecteurs aléatoires de $\mathbb{R}^2$ indépendants et identiquement distribués. Entre les instants $n$ et $n+1$, la particule se déplace de $M_n$ à $M_{n+1}$ en ligne droite. Nous regardons la trajectoire globale de la particule de pollen jusqu'à un temps 10000.

1. *En quoi le modèle est-il fidèle aux observations de Brown ?*
   — L'hypothèse $(H_1)$ suggère qu'on choisisse pour bâtir la trajectoire $M$ une fonction qui est construite à l'aide de variables aléatoires. Si on voulait prendre pour $M$ une fonction donnée par une expression analytique (comme c'est le cas par exemple pour les modèles malthusiens ou les équations logistiques de dynamique de populations) on ne retrouverait pas le caractère irrégulier observé par Brown. Par ailleurs, le mouvement doit être incessant, ce qui est vérifié par l'ajout continuel de nouveaux mouvements $Z_n$, pour $n \in \mathbb{N}$.
   Enfin l'hypothèse $(H_2)$ supposait que le mouvement passé d'une particule n'ait pas d'influence sur le mouvement présent et futur. Les évènements aléatoires associés sont donc indépendants, ce qui justifie qu'on choisisse pour $Z_n$ des variables indépendantes.

2. *Quelles sont les limites du modèle ?*
   Une réponse possible est de dire qu'il est irréaliste de considérer que les chocs ont lieu à des instants entiers. A priori, la particule de pollen peut rencontrer des particules d'eau à n'importe quel moment, et même pourquoi pas plusieurs particules en même temps. Une autre limitation est que le modèle n'est pas entièrement défini puisqu'on ne connaît pas la loi des variables aléatoires $Z_n$ et qu'il est possible qu'aucun des choix qui sont fait dans la suite du devoir ne soit conforté par l'observation.

**Tirage de variables aléatoires :**

Notons $Z$ un vecteur aléatoire qui a la même loi que chacun des vecteurs $Z_n$. L'objectif est de simuler à l'aide d'un outil informatique des trajectoires $M$ pour plusieurs lois pour cette variable. On observera comment le comportement qualitatif global de $M$ dépend du choix de la loi de $Z$.
On supposera que le **seul** aléa que notre logiciel nous permet de générer consiste en des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.

**Exemple 1.**

3. a) *Donnons une densité et la fonction de répartition de la variable aléatoire $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ :*
C'est une question de cours. Soit $f_U$ une densité de $U$ et $F_U$ sa fonction de répartition. Alors :

$$f_U = \mathbf{1}_{]0,1[} \text{ et } F_U : x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

*Déterminons son espérance et sa variance :*
Il s'agit bien ici de « déterminer » et non de « donner »l'espérance et la variance. Les calculs sont donc indispensables !
$\mathbb{E}(U)$ existe car $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_U(x)dx = \int_0^1 xdx$ d'après la relation de Chasles et c'est une intégrale définie puisque $x \longmapsto x$ est continue sur $[0,1]$.

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut : } \mathbb{E}(X) = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}}$

$\mathbb{E}(U^2)$ existe car $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |x^2| f_U(x)dx = \int_0^1 x^2dx$ d'après la relation de Chasles et c'est une intégrale définie puisque $x \longmapsto x^2$ est continue sur $[0,1]$.
Donc $\mathbb{E}(X^2)$ existe et vaut : $\mathbb{E}(X^2) = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{V}(X) \text{ existe et vaut : } \mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}}$

b) On considère un vecteur aléatoire $A \in \mathbb{R}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(A = (0,1)) = \mathbb{P}(A = (0,-1)) = \mathbb{P}(A = (1,0)) = \mathbb{P}(A = (-1,0)) = \frac{1}{4}$$

On souhaite réaliser un algorithme permettant de simuler le vecteur aléatoire $A$. On nous a donné une ébauche de fonction écrite en langage Python, où la fonction `random()` réalise (ou simule) une variable aléatoire de loi $\mathcal{U}_{]0,1[}$. On considère que des appels successifs de `random()` engendrent des réalisations indépendantes. Cette fonction est aisément modifiable car chaque vecteur aléatoire est équiprobable de probabilité $p = 1/4$ et il suffit de modéliser la loi uniforme sur $[\![1,4]\!]$ :

```
def flipFlop():
    U=random()
    if U<0.25:
        return [0,1]
    elif U<0.5:
        return [0,-1]
    elif U<0.75:
        return [1,0]
    else:
```

```
        return [-1,0]
```

c) *Dessinons les différents cas possibles pour le premier et le second pas de la trajectoire de la particule de pollen lorsque les vecteurs $Z_n$ ont même loi que $A$ :*

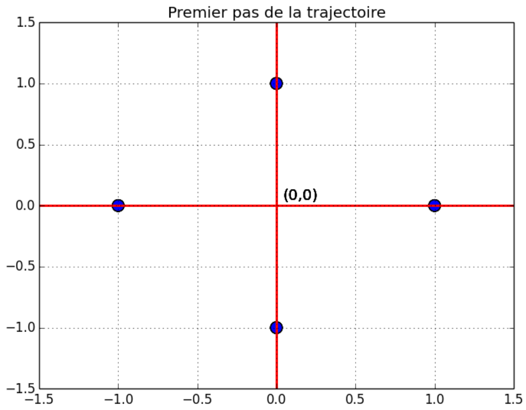


FIGURE 1 – Un pas depuis $(0,0)$

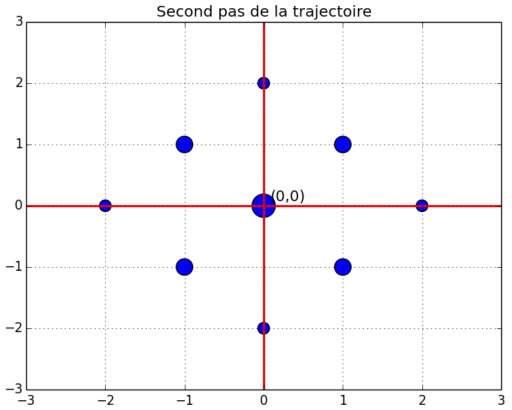


FIGURE 2 – Deux pas depuis $(0,0)$

*Les points atteints sont-ils équiprobables ?* La réponse est **non**. En effet, il y a pour chaque mouvement une chance sur 4 d'aller dans l'une des quatre directions cardinales. Par ailleurs, les variables $Z_n$ étant indépendantes, on a par exemple une chance sur seize d'atteindre le point de coordonnées $(2,0)$ (un seul cas favorable) et quatre chances sur seize de revenir en $(0,0)$ puisque quatre façons incompatibles et équiprobables (de probabilité $1/16$) de revenir sur ses pas.

*Note :* Sur la figure 2 on a représenté des points dont la taille est proportionnelle à la probabilité de se situer sur cet emplacement au temps $t = 2$.

Si on est courageux, on peut toujours le justifier de la façon suivante :

$$\mathbb{P}(M_2 = (0,0)) = \mathbb{P}\left((M_2 = (0,0)) \cap (M_1 = (1,0))\right) + \mathbb{P}((M_2 = (0,0)) \cap (M_1 = (1,1))) + \mathbb{P}((M_2 = (0,0)) \cap (M_1 = (-1,0))) + \mathbb{P}((M_2 = (0,0)) \cap (M_1 = (0,-1)))$$

d'après la formule des probabilités totales, puisque

$$\{(M_1 = (1,0)), (M_1 = (0,1)), (M_1 = (-1,0)), (M_1 = (0,-1))\}$$

est un système complet d'événements.
avec :

$$\mathbb{P}(M_2 = (0,0), M_1 = (1,0)) = \mathbb{P}(Z_2 = (-1,0), M_1 = (1,0))$$

puisque pour revenir en $(0,0)$ il a fallu faire un pas vers l'est. Soit

$$\mathbb{P}(M_2 = (0,0), M_1 = (1,0)) = \mathbb{P}(Z_2 = (-1,0)\mathbb{P}(M_1 = (1,0)) = \frac{1}{16}$$

car les événements sont indépendants.
Par un raisonnement similaire pour les trois intersections suivantes, on obtient :
$\mathbb{P}(M_2 = (0,0)) = 4\dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{4} \neq \mathbb{P}(M_2 = (2,0)) = \dfrac{1}{16}$

**Exemple 2.**

4. a) *Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$. Quelle est la loi suivie par $S = 2U - 1$ ?*
On a $U(\Omega) = ]0,1[$ donc $S(\omega) = ]-1,1[$.
Dès lors :

— $\forall x \leq -1$, $F_S(x) = 0$
— $\forall x \geq 1$, $F_S(x) = 1$
— $\forall -1 < x < 1$, $F_S(x) = \mathbb{P}(S \leq x) = \mathbb{P}(U \leq \frac{x+1}{2}) = F_U(\frac{x+1}{2}) = \dfrac{x+1}{2}$
puisque $-1 < \dfrac{x+1}{2} < 1$ si $-1 < x < 1$.

On peut toujours ajouter, par dérivation, que $f_S(x) = F_S'(x) = \dfrac{1}{2}\mathbf{1}_{]-1,1[}(x)$

Quoiqu'il en soit :
***Conclusion*** : $\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{U}_{]-1,1[}}$

b) Soit $V$, $W$ des variables aléatoires indépendantes, telles que $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ et

$$\mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(W = -1) = \frac{1}{2}$$

Soit $T$, variable aléatoire définie par $T = V \cdot W$. *Déterminons sa fonction de répartition $F_T$ en pensant à appliquer la formule des probabilités totales :*
On commence comme d'habitude par noter que $T(\Omega) = (V \cdot W)(\Omega) = ]-1,1[\backslash\{0\}$.
$T$ étant une variable aléatoire à densité, on pourra considérer que $T(\Omega) = ]-1,1[$. Dès lors :
— $\forall x \leq -1$, $F_T(x) = 0$
— $\forall x \geq 1$, $F_T(x) = 1$
— $\forall -1 < x < 1$, $F_T(x) = \mathbb{P}(T \leq x) = \mathbb{P}(V \cdot W \leq x)$
Or $\{(W = -1), (W = 1)\}$ est un système complet d'événements. Donc, d'après la formule des probabilités totales :
$$\mathbb{P}(V \cdot W \leq x) = \mathbb{P}[(V \cdot W \leq x) \cap (W = -1)] + \mathbb{P}[(V \cdot W \leq x) \cap (W = 1)]$$
Mais par hypothèse, $V$ et $W$ sont indépendantes, donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(V \cdot W \leq x) &= \mathbb{P}(V \cdot W \leq x)\mathbb{P}(W = -1) + \mathbb{P}(V \cdot W \leq x)\mathbb{P}(W = 1)\\
&= \mathbb{P}(V \geq -x)\frac{1}{2} + \mathbb{P}(V \leq x)\frac{1}{2} = (1 - \mathbb{P}(V < -x))\,\frac{1}{2} + \mathbb{P}(V \leq x)\frac{1}{2}\\
&= (1 - F_V(-x))\frac{1}{2} + F_V(x)\frac{1}{2}\\
&= \begin{cases} (1-0)\cdot\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{2} = \dfrac{1+x}{2} & \text{si } x \geq 0 \text{ car } F_V(-x) = 0 \text{ si } -x < 0\\ (1-(-x))\dfrac{1}{2} + 0\cdot\dfrac{1}{2} = \frac{1+x}{2} & \text{si } x < 0 \text{ car } F_V(-x) = -x \text{ si } -x \in ]0,1[ \end{cases}
\end{aligned}$$

D'où $F_T(x) = \dfrac{x+1}{2}$, $\forall x \in ]-1,1[$.

***Conclusion*** : $\boxed{T \text{ et } S \text{ ont même loi, à savoir la loi uniforme sur } ]-1,1[}$

*Précisons l'espérance et la variance de $T$ :*
D'après ce qui précède, $\boxed{\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(S) = \dfrac{-1+1}{2} = 0}$ et $\boxed{\mathbb{V}(T) = \mathbb{V}(S) = \dfrac{(1-(-1))^2}{12} = \dfrac{1}{3}}$.

c) On considère la fonction Python :

```
def hasardS():
    return 2*random()-1
```

*Écrivons une fonction* **`hasardT()`** *qui simule le même résultat que* **`hasardS()`** *mais utilise une simulation des variables $V$ et $W$ définies ci-dessus :*
Il suffit d'appeler un première fois la fonction `random()` pour simuler la réalisation de $V$.
On appelle une nouvelle fois `random()`. Si le résultat est inférieur à $1/2$, on dira que $(W = 1)$ est réalisé. Ceci se produira avec avec un probabilité égale à $1/2$ et sinon, on dira que $(W = -1)$ est réalisé et on retournera $T = -V$.

```
def hasardT():
   V=random()
   W=random()
   if W<1/2:
      return V
   else:
      return -V
```

d) On considère un vecteur $B \in \mathbb{R}^2$ donné à l'issu de la fonction Python suivante :

```
def vecteurB():
    if random()<0.5:
        return [hasardS(),0]
    else:
        return [0,hasardS()]
```

*Décrivons en termes simples l'évolution de la trajectoire de la particule de pollen lorsque les vecteurs aléatoires $Z_n$ ont tous la même loi que $A$ (premier exemple) ou tous la même loi que $B$ (second exemple) :*

— Si tous les vecteurs $Z_n$ ont même loi que $A$, alors la particule de pollen se déplace à chaque intervalle de temps dans l'une des quatre directions cardinales de façon équiprobable sur une distance exactement égale à 1.
— Si tous les vecteurs $Z_n$ ont même loi que $B$, ils se déplaceront également dans l'une des quatre directions cardinales de façon équiprobable sur l'axe $Est-Ouest$ et sur l'axe $Nord-sud$ mais, à la différence de la loi $A$, la distance parcourue variera continuement et sera comprise entre $-1$ et $1$ de façon uniforme.

**Exemple 3.**

On souhaite construire un vecteur aléatoire $C$ comme dans l'exemple 2 à la différence que la distance parcourue à chaque pas de temps n'est plus uniforme mais simulée par une variable aléatoire $R$. On suppose ici que $R$ admet pour densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{a(1+x^2)},\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ où } a \text{ est une constante réelle.}$$

5. a) *Déterminons quelle est la valeur de la constante $a$ qui définit $f$ :*

— Puisque $f$ est une densité, on a $f \geq 0$ et donc $a > 0$.

— $\forall a > 0$, $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ car inverse d'une fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

— On cherche donc $a > 0 / \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a(1+x^2)}$ converge et vaut 1.

$f$ est paire et continue sur $\mathbb{R}$ donc il suffit de déterminer $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{a(1+x^2)}$ converge et vaut $1/2$.

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{a(1+t^2)} = \frac{1}{a}[\arctan(t)]_0^x = \frac{1}{a}\arctan(x)$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = \frac{1}{a}\frac{\pi}{2}$ donc $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{dx}{a(1+x^2)}$ converge et vaut $\dfrac{\pi}{2a}$.

D'où :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{a(1+x^2)} \text{ converge et vaut } 2\frac{\pi}{2a} = \pi/a$$

***Conclusion*** : $\boxed{f \text{ est une densité si et seulement si } a = \pi}$

b) Soit $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}$. *Donnons une densité de $V$ puis démontrons que la variable $R = \tan V$ possède $f$ comme densité :*

C'est une nouvelle fois une question de cours sur la loi uniforme...

$$f_V(x) = \frac{1}{\pi}\mathbf{1}_{]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>déterminons la loi de $R = \tan V$ :</u>

Commençons par dire que $R(\Omega) = \tan[V(\Omega)] = \tan(]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[) = \mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $F_R(x) = \mathbb{P}(R \leq x) = \mathbb{P}(\tan V \leq x) = \mathbb{P}(V \leq \arctan(x))$ car arctan est une bijection, strictement croissante, de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Dès lors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_R(x) = F_V(arctan(x))$ et $F_R$ étant dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonction dérivables, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_R(x) = F_R'(x) = \frac{1}{1+x^2} f_V(\arctan(x)) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

***Conclusion*** : $\boxed{R = \tan V \text{ suit une loi de densité } f : x \longmapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}}$

c) *Décrivons une méthode pour construire le vecteur aléatoire $C$ à partir de deux variables indépendantes $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ :*

L'idée est de choisir dans un premier temps la distance $R$ sur laquelle la particule va se déplacer pendant chaque intervalle de temps : On simule la réalisation de $U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ grâce à `random()` puis on calcule $V = \pi U_1 - \pi/2$.

On montre alors comme dans 4.c) que $V \hookrightarrow \mathcal{U}_{]-\pi/2,\pi/2[}$ et donc, d'après 5.b), $R = \tan V$ simulera la réalisation d'une variable aléatoire de densité $f$.

Il s'agit ensuite de se déplacer selon l'axe $Est - Ouest$ ou l'axe $Nord - Sud$ de façon équiprobable. L'utilisation d'une variable aléatoire $U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ permet de le faire. En effet, si le résultat est inférieur à $1/2$ (probabilité de $1/2$) alors on choisit de se déplacer horizontalement et de retourner un vecteur de la forme $(R, 0)$ et sinon, on retourne un vecteur de la forme $(O, R)$.

Cette méthode répond à la question posée.

**Modèles isotropes :**

On souhaite maintenant générer des vecteurs aléatoires $Z$ construits de la façon suivante. On va d'abord choisir un vecteur de $\mathbb{R}^2$ qui donnera la direction et le sens du mouvement de la particule de pollen à l'issue du choc, puis on va choisir la longueur parcourue dans cette direction avant le prochain choc.

On écrira donc $Z = (R\cos V, R\sin V)$ et on supposera que :

— $(P_1)$ $R$ est une variable aléatoire positive
— $(P_2)$ $V$ suit une loi uniforme sur $]0, 2\pi[$
— $(P_3)$ Les variables $R$ et $V$ sont indépendantes.

6. a) *Quel sens donnons-nous aux propriétés* $(P_2)$ *et* $(P_3)$ *dans ce modèle ?* Dans les questions précédentes, les modèles proposés dépendaient de la base (non nécessairement orthonormée) dans laquelle on regardait se mouvoir la particule de pollen. Désormais, les hypothèses $(P_2)$ et $(P_3)$ assurent que la direction choisie est uniformément répartie entre 0 et $2\pi$ et que cette dernière ne dépend pas de la distance parcourue. Autrement dit, désormais, les chocs n'ont plus de direction privilégiée.
   b) On a immédiatement que $\|Z\| = \sqrt{R^2(\cos^2 V + \sin^2 V)} = \sqrt{R^2} = R$ car $R$ est la longueur (positive) parcourue par la particule avant le prochain choc.
   En conséquence la longueur $R$ du mouvement peut être modélisé par toute variable aléatoire à densité prenant ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (par exemple qui suit la loi exponentielle ou bien on posera $R = X^2$ avec $X$ qui suit une loi uniforme, une loi normale ou encore une loi de densité $f$ définie dans l'exemple 3., question 5.a)... Pour la direction, l'énoncé nous indique qu'elle est décrite par une loi uniforme sur $]0, 2\pi[$

**Exemple 4.**

On souhaite générer une variable aléatoire $R$ ayant pour densité la fonction $f_R$ définie par :

$$f_R(\rho) = \begin{cases} \rho\exp(-\frac{\rho^2}{2}), \text{ pour tout } \rho \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

7. a) *Vérifions que $f_R$ est bien une densité :*
   — $f_R$ est positive sur $\mathbb{R}$.
   — $f_R$ est continue sur $\mathbb{R}$ car continue sur $\mathbb{R}_-^*$ (fonction nulle) et sur $\mathbb{R}_+$ par composition et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs $f_R(0) = 0 = \lim\limits_{\rho \to 0^-} f_R(\rho)$.
   — Enfin, d'après la relation de Chasles, $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_R(\rho)d\rho = \int_0^{\infty} \rho\exp(-\frac{\rho^2}{2})d\rho$.
   On intègre partiellement sur l'intervalle $[0, x]$ :
   $$F_R(x) = \int_0^x \rho\exp(-\frac{\rho^2}{2})d\rho = \left[-\exp(-\frac{\rho^2}{2})\right]_0^x = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}$$
   D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} F_R(x) = 1$ ou encore $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_R(\rho)d\rho$ converge et vaut 1.

   ***Conclusion*** : $\boxed{f_R \text{ est une densité de probabilité}}$

   b) *Calculons la fonction de répartition $f_R$ de la variable aléatoire $R$ :*
   Précisons que $R(\Omega) = \mathbb{R}_+$ (support de la densité $f_R$). Dès lors :

$\forall \rho < 0,\ F_R(\rho) = 0$

$\forall \rho \geq 0,\ F_R(\rho) = 1 - e^{-\frac{\rho^2}{2}}$ d'après la question 7.a).

***Conclusion*** : $\boxed{F_R(\rho) = 1 - e^{-\frac{\rho^2}{2}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(\rho)}$

*Déduisons-en la loi de la variable aléatoire $R^2$ :*

— On commence par spécifier $R^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$
— Donc $\forall x < 0,\ F_{R^2}(x) = 0$.
— $\forall x \geq 0,\ F_{R^2}(x) = \mathbb{P}(R^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq R \leq \sqrt{x}) = F_R(\sqrt{x}) - F_R(-\sqrt{x})$
  Or $F_R(t) = 0$ si $t < 0$ donc $F_R(-\sqrt{x}) = 0$.
  D'où $F_{R^2}(x) = F_R(\sqrt{x}) = 1 - e^{-x/2}$.

On en déduit que $F_{R^2}(x) = 1 - e^{-x/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $f_{R^2}(x) = F'_{R^2}(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

***Conclusion*** : $\boxed{R^2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})}$

c) Étant donné $U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$, *montrons que la variable aléatoire $E = -2\ln U_2$ possède une densité et déterminons sa loi, son espérance et sa variance :*
C'est un rituel indispensable... $E(\Omega) = -2\ln U_2(\Omega) = -2\ln(]0,1[) = \mathbb{R}_+^*$. Dès lors :
$\forall x \leq 0,\ F_E(x) = \mathbb{P}(E \leq x) = 0$
$\forall x > 0,\ F_E(x) = \mathbb{P}(-2\ln U_2 \leq x) = \mathbb{P}(\ln U_2 \geq -\frac{x}{2}) = \mathbb{P}(U_2 \geq e^{-x/2}) = 1 - F_{U_2}(e^{-x/2}) = 1 - e^{-x/2}$
puisque la fonction exponentielle par laquelle on a composé est croissante et $F_{U_2}(t) = t$ si $t \in ]0,1[$...

***Conclusion*** : $\boxed{E \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})}$

d) *Déduisons-en une méthode pour construire un vecteur aléatoire $D = (R\cos V, R\sin V)$ à partir de deux variables $U_1, U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ indépendantes :*
Si $U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$ alors $V = 2\pi U_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,2\pi[}$. Nous avons la direction et le sens du mouvement de la particule à l'issue du choc.
Si $U_2 \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$, alors $-2\ln U_2 \hookrightarrow \mathcal{E}(\frac{1}{2})$ qui n'est autre que la loi de $R^2$, variable aléatoire égale au carré de la longueur parcourue dans la direction préalablement choisie...
Il suffira donc, pour obtenir $R$ et construire le vecteur aléatoire $D$ demandé, de prendre la racine carrée de la valeur obtenue à l'issue de ce second calcul.

**Exemple 5.**

On prend le même modèle que dans l'exemple **4**

$$Z = (R\cos V, R\sin V) \text{ satisfaisant } (P_1),\ (P_2) \text{ et } (P_3)$$

mais la loi de $R$ est cette fois prise uniforme sur $]0,1[$. On note $E$ le vecteur aléatoire $(R\cos V, R\sin V)$.

**Exemple 6.**

On prend toujours le même modèle que dans l'exemple **4**

$$Z = (R\cos V, R\sin V) \text{ satisfaisant } (P_1),\ (P_2) \text{ et } (P_3)$$

et on suppose que $R$ a une loi admettant la densité $g : x \longmapsto \dfrac{2}{\pi(1+x^2)}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On note $F$ le vecteur aléatoire $(R\cos V, R\sin V)$.

8. *Étudions, pour chacun des vecteurs aléatoires $Z = (X, Y)$ des* ***Exemples 1 à 6****, si la variable aléatoire $R = \|Z\| = \sqrt{X^2+Y^2}$ admet une espérance et calculons-la si c'est possible :*

— *Exemple 1 :* Dans cet exemple, $R = \sqrt{X^2+Y^2}$ est une variable aléatoire certaine égale à 1 donc $\boxed{\mathbb{E}(R) \text{ existe et vaut } 1}$

— *Exemple 2 :* Dans cet exemple, le vecteur $Z$ est de la forme $(S, 0)$ ou $(0, S)$ où $S \hookrightarrow \mathcal{U}_{]-1,1[}$. Donc $R = \sqrt{X^2+Y^2} = \sqrt{S^2} = |S|$.
Par application du théorème de transfert, $\mathbb{E}(R)$ existe si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t| f_S(t)dt$ converge (absolument).
Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |t| f_S(t)dt = \int_{-1}^{1} \frac{|t|}{2}dt$. C'est une intégrale définie donc convergente.
***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{E}(R) \text{ existe et vaut par parité : } 2 \cdot \displaystyle\int_0^1 \frac{|t|}{2}dt = \int_0^1 tdt = \frac{1}{2}}$

— *Exemple 3 :* On connaît ici la loi de $R$ qui admet une espérance si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\pi(1+x^2)}dx$ converge absolument.
Or $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{xdx}{1+x^2}dx$ diverge puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{tdt}{1+t^2} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(1+t^2)\right]_0^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = +\infty$$

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ diverge et $\boxed{\mathbb{E}(R) \text{ n'existe pas}}$.

— *Exemple 4 :* Là encore on connaît une densité de $R$. On dira que $\mathbb{E}(R)$ existe sous réserve de convergence absolue de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \rho f_R(\rho)d\rho = \int_0^{\infty} \rho^2 e^{-\frac{\rho^2}{2}} d\rho \text{ (d'après la relation de Chasles)}$$

On peut toujours ici se lancer dans une intégration par partie mais il est plus rapide de se référer à la loi normale centrée réduite...
En effet, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{V}(X) = 1 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt$.
D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}$ et comme la fonction intégrée est paire :

$$\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}dt \text{ converge et vaut } \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

***Conclusion*** : $\boxed{\mathbb{E}(R) \text{ existe et vaut : } \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}}$

9. *Exemple 5 :* Ici c'est plus simple. Par hypothèse, $R \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}$ donc

$$\boxed{\mathbb{E}(R) \text{ existe et vaut } \frac{1}{2}}$$

10. *Exemple 6 :* Comme dans l'exemple 3, on montrer que $\boxed{\mathbb{E}(R) \text{ n'existe pas}}$.

**Analyse des trajectoires et conclusion**

On a tracé en annexe dans les **Figures 1 à 6** des trajectoires de la particule de pollen jusqu'au temps 10000. Pour chacune de ces figures, on a choisi la loi de $Z$ d'après l'un des exemples 1 à 6 ; les graduations sont indiquées sur le côté.

11. a) *A l'aide d'un raisonnement méthodique, déterminons la loi qui correspond à chacune de ces figures :*
Voici la réponse proposée par le concepteur de ce sujet :
« On identifie clairement que la figure 5. correspond à l'**exemple 1** car la trajectoire est inscrite sur une grille régulière. La figure 2. correspond à l'**exemple 2** car les mouvements sont verticaux ou horizontaux. La figure 3. a la même propriété, mais les échelles des axes sont d'un ordre beaucoup plus grand que pour la figure 2., ce qui vient du fait que l'espérance de l'amplitude des sauts est infinie dans l'**exemple 3**. Pour cette même raison, la figure 1. correspond à l'**exemple 6**. On détermine quelles figures parmi les numéros 4 et 6 proviennent des **exemples 4 et 5** respectivement en remarquant que les échelles des axes sont différentes et en se référant au calcul des espérances des longueurs des sauts. »

    b) Quelles sont les modèles les plus appropriés pour décrire le mouvement de la particule de pollen observé par Brown ?
« Les modèles correspondants aux exemples 1, 2, et 3 (figures 2, 3 et 5) ne sont pas réalistes car le mouvement n'est pas isotrope. Le modèle de la figure 1 non plus car on imagine mal la particule de pollen partir dans une direction donnée avec une telle intensité simplement par l'effet de contact avec des particules d'eau. Les figures 4 et 6, qui ne sont distinguables sur la figure que par la variance, proposent le scenario le plus plausible. »

**FIN**