MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire et Variables aléatoires à densité

Le sujet se compose d'un ***exercice*** *et de* ***deux problèmes****. On prendra soin de lire l'ensemble des énoncés avant de commencer à composer.*
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice 1 :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on on considère l'endomorphisme f_a de E associé défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

① Écrire en Python une fonction `f_a(x,y,z,a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$ pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ exprimé lui aussi dans la base $\mathcal{B}$.

② a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.

b) Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.

③ Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.

④ On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.

a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.

b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.

c) La matrice A est-elle inversible ?

⑤ Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.

b) Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.

Problème 1 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$$

① **Recherche de sous-espaces vectoriels caractéristique de f.**

On pose $M_\lambda = A - \lambda I = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -6\lambda & 3 & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et on appelle (S_λ) le système homogène associé, à savoir : $M_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer qu'il existe trois valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) admet au moins une solution non nulle. On notera désormais λ_1 et λ_2 et λ_3 ces trois valeurs avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

b) Soit E_λ l'espace vectoriel solution de (S_λ) dans chacun de ces trois cas.
Montrer que $E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{u_1\} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$, $E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{u_2\} = \text{Vect}\{(1,0,1)\}$ et que $E_{\lambda_3} = \text{Vect}\{u_3\} = \text{Vect}\{(0,-1,1)\}$.

c) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Exprimer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

② **Calcul des puissances successives de A.**

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Soit $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. Exprimer D en fonction de A, P et P^{-1} et montrer que
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

d) Démontrer que $D^n = P^{-1}A^nP$ pour tout entier naturel n.

e) En déduire l'expression de A^n.

③ **Étude d'une suite matricielle**

Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Nous définissons la suite matricielle $(X_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B. \end{cases}$$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Considérons les endomorphismes a et b de E définis par $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$.

a) Si il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$, démontrer que $\text{Im}(b) \subset \text{Im}(\text{Id}_E - a)$.

b) On suppose à nouveau qu'il existe $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

i. Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

ii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

④ **Un exemple**

Dans cette question, nous admettons la réciproque de la question 3.a), soit :

$$\exists L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / L = AL + B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(id_E - a)$$

Nous choisissons par ailleurs

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Considérons l'endomorphisme a de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$.
Démontrer que pour qu'un vecteur v de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ appartienne à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.

b) Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
✐ : *On rappelle à toute fin utile que* $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}\{b(e_1), b(e_2), b(e_3)\}$

c) Déterminer, par le calcul, une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$.
On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls.
À partir de cette matrice L', déterminer une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

d) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Déterminer l'expression de la limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de X_0 et de L.

Problème 2 : Étude d'une loi de probabilité et application.

Dans ce problème, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+^*$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers naturels non nuls, des nombres réels et des nombres réels strictement positifs.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction $\ell_{\alpha,r}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\ell_{\alpha,r}(t) = \begin{cases} \alpha \dfrac{t^{\alpha-1}}{r^\alpha} & \text{si } t \in]0, r[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

① Montrer que $\ell_{\alpha,r}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, $\alpha > 0$.

✐ *Remarque : Dans toute la suite de ce problème, on supposera cette condition réalisée.*

On dit qu'une variable aléatoire réelle X suit la loi $\mathcal{L}$ de paramètres α et r si X admet $\ell_{\alpha,r}$ pour densité. On notera :

$$X \hookrightarrow \mathcal{L}(\alpha, r)$$

✐ *Dans toute la suite de ce problème, on note X une variable aléatoire de loi $\mathcal{L}(\alpha, r)$.*

② On s'intéresse tout d'abord aux propriétés élémentaires de cette loi.

a) Déterminer la fonction de répartition F de X.

b) Que vaut $\mathbb{P}(X \leq 0)$?

c) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $W = -\ln\left(\dfrac{X}{r}\right)$. Préciser son espérance et sa variance.

③ Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*$. Soient U_1 et U_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètre λ et μ respectivement.

a) Donner une densité de $Y = -U_2$.

b) On rappelle que si V_1 et V_2 sont deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives v_1 et v_2, alors $Z = V_1 + V_2$ est encore une variable aléatoire réelle à densité, dont une densité est données par $z \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} v_1(u) v_2(t-u) du$.
Montrer qu'une densité de $U_1 - U_2$ est donnée par :

$$g_{\lambda,\mu} : t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \\ \dfrac{\alpha\mu}{\lambda+\mu} e^{\mu t} & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$$

c) Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes, respectivement de lois $\mathcal{L}(\alpha, r)$ et $\mathcal{L}(\beta, s)$ avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$. A l'aide de la question qui précède et de la question 2.c), donner la loi de $Z = -\ln\left(\dfrac{sX}{rY}\right)$ et en déduire que :

$$\mathbb{P}(X<Y)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{s}{r}\right)^{\alpha} & \text{si } s<r\\[2mm] 1-\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\dfrac{r}{s}\right)^{\beta} & \text{si } r\leq s\end{cases}$$

④ On applique maintenant le résultat de la question précédente à un modèle de test de dépistage d'une maladie canine H au sein d'une population $\mathcal{P}$. La présence de cette maladie chez un individu de $\mathcal{P}$ se note par la modification de la loi de concentration de deux bactéries A et B présentes dans l'estomac. Plus précisément, ces concentrations respectives X et Y, en UFCml^{-1} (Unité Formant Colonie par millilitre), sont deux variables aléatoires réelles indépendantes de lois respectives $\mathcal{L}(\lambda, r)$ et $\mathcal{L}(\beta, s)$, avec $(\alpha, \beta, r, s) \in (\mathbb{R}_+^*)^4$.

On a statistiquement les valeurs suivantes :

— Pour les sujets *non atteints* de la maladie H :
$$\alpha = 2\,;\ \beta = 3\,;\ r = 100 \text{ UFC } ml^{-1}\,;\ s = 50 \text{ UFC } ml^{-1}$$
— Pour les sujets *atteints* de la maladie H :
$$\alpha = 4\,;\ \beta = 2\,;\ r = 400 \text{ UFC } ml^{-1}\,;\ s = 800 \text{ UFC } ml^{-1}$$

Le test T consiste à effectuer un prélèvement sanguin d'un individu $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$. Une fois ce prélèvement mis en culture dans des conditions adéquates, les deux bactéries A et B entrent en concurrence. Au bout de quelques heures, seule celle dont la concentration était la plus forte subsiste, l'autre ayant totalement disparu. Cette procédure permet donc de savoir lequel des événements $(X < Y)$ ou $(X > Y)$ est réalisé pour $\mathcal{C}$.
On note $R = (X < Y)$. Le test est positif si R est réalisé, négatif sinon.
On note M l'événement « le sujet $\mathcal{C} \in \mathcal{P}$ est atteint de la maladie H ». L'événement contraire d'un événement E sera systématiquement noté $\overline{E}$ dans la suite.

a) Donner les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(R|M) = \mathbb{P}_M(R)$ et $\mathbb{P}(R|\overline{M}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(R)$.

b) Un sondage a permis d'estimer $\mathbb{P}(M) = \dfrac{1}{40}$. Donner la probabilité qu'un sujet testé soit atteint de la maladie H sachant que son test T est positif. Qu'en pensez-vous ?

- FIN -