12 T.D. Variables aléatoires à densité.

– X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. « Dans ce contexte, donner la loi d'une variable aléatoire X, c'est justifier que X admet une densité et en donner une ».
– Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
– Espérance, théorème de transfert et inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments.
– Lois usuelles : Loi uniforme, loi exponentielle et loi normale.
– Somme de variables aléatoires à densité indépendantes, la formule du produit de convolution devant être rappelée en cas de besoin.

Exercice 1 : ✶

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} kx(1-x) \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

① Déterminer k pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X.

② En déduire la fonction de répartition de X dont on tracera la courbe.

③ Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 :✶ [Oral Agro 2005]

On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant : $g(t) = \dfrac{b}{2^t}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$ où b est une constante réelle.

① Déterminer b pour que g soit une densité d'une variable aléatoire X.

② Déterminer la loi de $Y = X - 1$. En déduire que X possède et une espérance et une variance qu'on explicitera.

Exercice 3 : ✶✶✶ [Agro 2007]

Soit r un réel strictement positif. On considère la fonction f_r définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_r(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2 + r)}$$

① Déterminer la valeur de α pour que f_r soit une densité de probabilité. On désignera dans la suite par X_r une variable aléatoire réelle dont f_r est une densité.

② Préciser la fonction de répartition de X_r.

③ Montrer que X_r n'admet pas d'espérance.

④ On suppose désormais que $r = 1$.

a. Soit $Y = \arctan(X_1)$; Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

b. Soit $Z = \dfrac{1}{1 + X^2}$; Déterminer la fonction de répartition de Z ; Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en pensant à appliquer le théorème de transfert.

Exercice 4 ✶✶ :

Soit U une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi uniforme sur $[0,1[$. Soit $\lambda > 0$.

① Quelle est la loi de $V = -\dfrac{1}{\lambda} ln(1-U)$?

② Soit $X = \lfloor V \rfloor + 1$ où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de V.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ où $p = 1 - e^{-\lambda} \in]0,1[$

b. Vérifier qu'on a ainsi déterminé une loi de probabilité, à savoir que la série $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge et que sa somme vaut 1.

c. On admet que $\mathbb{E}(X)$ existe si la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et que sous cette condition $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$. Montrer l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et la calculer.

Exercice 5 : ✶✶

Soit X une variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité est f définie par :

$$f(x) = \lambda\sqrt{x}e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{x}e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

① Déterminer λ grâce à un changement de variable de votre choix (plusieurs méthodes sont possibles dont une qui utilise les propriétés de la loi normale...) ; Construire la courbe représentant les variations de f.

② En posant $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^{n+1/2}e^{-x}dx$, $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation de récurrence entre les termes de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$. Calculer I_1 et I_2.

③ En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 6 : ✶

Dans le cadre d'essais thérapeutiques, vingt souris de laboratoire on été traitées à titre expérimental et suivies jusqu'à leur décès. La série des durées de survie, mesurées en jours à partir de la date de l'intervention jusqu'à celle du décès est la suivante :

Durée	25	143	238	16	54	41	172	410	71	91
Durée	112	29	149	78	325	38	14	92	114	53

① Déterminer la liste `Fc` des fréquences cumulées des durées de survie et tracer la fonction de répartition empirique associée aux observations du tableau précédent. Que penser de l'hypothèse : *la durée de survie des souris suit une loi exponentielle ?*

② Calculer la moyenne m, la variance σ^2 et la médiane empirique m_e de la série.

③ En supposant que les données suivent effectivement une loi exponentielle, on souhaite déterminer la valeur du paramètre λ qu'on peut raisonnablement proposer.

a. Montrer que si X suit une loi exponentielle, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_X(x) = y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$$

b. Proposez un changement de variable sur `Fc` permettant d'obtenir une valeur de λ par la méthode des moindres carrés. Le vérifier graphiquement et rappeler les formules permettant d'obtenir les coefficient a et b de la droite de régression.

c. En déduire une valeur approchée de λ et tracer sur un même graphe la fonction de répartition de X pour cette valeur de λ ainsi que les fréquences cumulées expérimentales.
Validez votre simulation en comparant $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement à m et à σ^2.

Exercice 7 : ✶

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite.
On pose $Y = X^2$.
Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance dont on prendra soin de justifier l'existence.

Exercice 8 : ✶✶

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.
On note $U = \dfrac{1}{2}(X+Y)$ et $V = \dfrac{1}{2}(X-Y)$

① Calculer l'espérance et la variance de U et de V.

② Déterminer une densité de probabilité de U.

③ Déterminer une densité de probabilité de V.

Exercice 9 : ✶✶

① Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et le système

$$(S_\lambda) : (A - \lambda I_2) \cdot X = 0 \text{ où } X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Donner une condition sur x et y afin qu'il existe deux valeurs réelles distinctes de λ pour lesquelles le système $A \cdot X = \lambda X$ admette au moins une solution non nulle.
Remarque : On ne cherchera pas à résoudre ces deux systèmes.

② Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y.

a. Écrire une fonction informatique qui calcule une valeur approchée de $\mathbb{P}(X^2 - Y > 0)$.
b. Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.
c. En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$f : z \longmapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

③ Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit telle qu'il existe deux valeurs réelles distinctes de λ pour lesquelles le système $M \cdot X = \lambda X$ admette au moins une solution non nulle ?