10 T.D. Intégrales généralisées.

Exercice 1 ✶ :

Dire dans chacun des cas suivants si l'intégrale est impropre. Si oui, étudier sa convergence

$$a) I=\int_0^1 x^2\ln x dx;\quad b) I=\int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}dx;\quad c)\int_{-1}^1 \frac{x}{2x+1}dx;\quad d) I=\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^3}$$
$$e) I=\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^3+\sqrt{x}};\quad f) I=\int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt;\quad g) I=\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt;\quad h) I=\int_0^{+\infty}\frac{1-\cos t}{t^2}e^{-t}dt$$

Exercice 2 ✶✶ :

Nature et valeur éventuelle des intégrales suivantes :

a) $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}dx$ poser : $t=\sqrt{x}$;

b) $I=\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}dx$ poser : $u=\tan x$;

c) $I=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx$ poser : $u=\arctan x$

Exercice 3 ✶ :

On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant : $g(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t<1\\ \dfrac{b}{2^t} & \text{si } t\geq 1\end{cases}$

Déterminer la constante $b\in\mathbb{R}$ pour que g soit positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt=1$

Exercice 4 ✶ :

On souhaite étudier la nature de $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t-t+1}$.

① Montrer que f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

② Donner un équivalent de $t\longmapsto \dfrac{1}{e^t-t+1}$ en $+\infty$

③ Conclure sur la convergence de I.

Exercice 5 ✶✶ :

① Montrer à l'aide de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^2}dt$ que $I=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ converge.

② Justifier que $\forall t\in[1,+\infty[$, $0\leq \dfrac{\cos^2 t}{t}\leq\dfrac{|\cos t|}{t}$

③ Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\cos(2t)}{t}dt$ converge et en déduire que $J=\displaystyle\int_1^{+\infty}|\frac{\cos t}{t}|dt$ diverge.