MATHEMATIQUES
Algèbre & Analyse

Epreuve Agro A 2008

Lu dans le rapport de jury : *« Beaucoup de copies montrent un net manque de rigueur dans le raisonnemnet mathématique. Il est pourtant **indispensable de justifier clairement et efficacement son raisonnement**, surtout lorsque les résultats sont donnés dans les questions. Notamment, il est totalement inutile de cherche à bluffer le correcteur et à vouloir à tout prix forcer le résultat quand ce n'est clairement pas cohérent avec ce qui précède. De même expliquer théoriquemnet comment on pourrait trouver les valeurs propres d'une matrice ou calculer ses vecteurs propres ne sert à rien, **il faut absolument savoir le faire**. Quand la recherche de sous-espaces propres se limite à des lignes de calcul sans lien entre elles, cela donne l'impression que le candidat ne maîtrise pas vraiment la nature de son travail.*
*Même si la majorité des copies sont propres, rappelons que **mettre en valeur les résultats obtenus et aérer une copie** ne feront qu'en améliorer la lisibilité. Sauter quelques lignes de temps en temps permet notamment au candidat qui souhaiterait plus tard apporter une précision supplémentaire de le faire sans que le résultat soit incompréhensible par le correcteur.*
*Enfin, déplorons le fait que **l'orthographe soit trop souvent négligée**, voire parfois carrément délaissée. »*

Problème 1 :

Lu dans le rapport de Jury : « En l'absence de calculatrice, il était indispensable de maîtriser le pivot de Gauss pour traiter la première partie. Le reste du problème ne demandait que des notions élémentaires d'algèbre linéaire et semble montrer que si une majorité de candidats a retenu les méthodes indispensables à ce genre d'exercices, un certain nombre de copies manquent cruellement de rigueur prouvant que la nature des objets enjeu n'a pas vraiment été comprise. »

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par $A = \dfrac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$

① a) *Montrons qu'il existe trois valeurs λ réelles pour lesquelles la matrice $A - \lambda Id$ est non inversible.*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(A-\lambda \mathrm{Id}) &= \mathrm{rg}\left(12(A-\lambda\mathrm{Id})\right)\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ -4 & 8-12\lambda & -4 \\ 1 & -2 & 7-12\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3} \end{matrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ 2-4\lambda & -\lambda & 0 \\ -4+14\lambda-12\lambda^2 & 1-2\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2 \leftarrow (L_2+4L_1)/12} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \left(L_3-(7-12\lambda)L_1\right)/12} \end{matrix}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

Premier cas : $\lambda = 0$. On a :

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7 & -2 & \boxed{1} \\ \boxed{2} & 0 & 0 \\ -4 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} = 3$$

La matrice A est inversible et $\lambda = 0$ ne fait pas partie des réels pour lesquels $A - \lambda\mathrm{Id}$ est non inversible.

Second cas : $\lambda \neq 0$. On peut continuer la méthode du pivot en choisissant $-\lambda$ comme pivot, ce qui donne :

$$\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 7-12\lambda & -2 & \boxed{1} \\ 2-4\lambda & \boxed{-\lambda} & 0 \\ P_1(\lambda) & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} {\scriptstyle L_1} \\ {\scriptstyle L_2} \\ {\scriptstyle L_3 \leftarrow \left(-\lambda L_3 - (1-2\lambda)L_2\right)/2} \end{array}$$

où

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) &= \big(-\lambda(-4 + 14\lambda - 12\lambda^2) - (1-2\lambda)(2-4\lambda)\big)/2 \\ &= 6\lambda^3 - 11\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 6(\lambda - 1)\Big(\lambda - \frac{1}{2}\Big)\Big(\lambda - \frac{1}{3}\Big). \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{rg}(A - \lambda I_3) = \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \in \{1; 1/2; 1/3\} \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}}$

Lu dans le rapport de Jury : « Cette partie a été délaissée par plus dela moitié des candidats et rares sont ceux qui ont pris la peine d'aller au bout des calculs. Bien que ces questions soient assez longues, le barème en tenait évidemment compte et ceux qui ont su faire preuve d'habileté dans les calculs ont été récompensés pour leur effort. Quelques candidats astucieux ayant lu les lignes suivantes (question 1.b)) se sont contentés de vérifier que 1, 1/2 et 1/3 étaient trois valeurs pour lesquelles $A - \lambda\mathrm{Id}$ n'était pas inversible et de justifier qu'il s'agissait des seules. Attention à n'effectuer que des opérations licites dans un pivot de Gauss, et à préciser quelles sont les opérations effectuées. »

On note désormais $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1/2$ et $\lambda_3 = 1/3$.

b) Pour chacune des trois valeurs de λ obtenue précédemment, la matrice $A - \lambda\mathrm{Id}$ est de rang $2 < 3$. Le système homogène associé $(A - \lambda\mathrm{Id})X = 0$ est donc de rang $2 < 3$ qui est l'ordre de la matrice et n'est donc de Cramer.
Conclusion : $\boxed{\text{Chacun des trois systèmes admet au moins une solution non nulle.}}$

La preuve par le calcul... (***N.B.*** : Nous noterons dès maintenant E_{λ_i} l'ensemble des solutions du système $(A - \lambda_i\mathrm{Id})X = 0$) :

Pour $\lambda_1 = 1$: D'après la réduite de gauss déterminée en 1.a), on a, pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A - I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -5x - 2y + \boxed{z} = 0 \\ -2x \quad \boxed{-y} \quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -2x \\ z = x \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}}$

Pour $\lambda_2 = 1/2$: D'après la réduite de gauss déterminée en 1.a), on a, pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A - \frac{1}{2}I_3\Big)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x - & 2y + \boxed{z} & = 0 \\ & \boxed{-\frac{1}{2}y} & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} z = -x \\ y = \ \ 0 \end{array} \right. \quad (x \in \mathbb{R}),$$

Conclusion : $\boxed{E_{1/2} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}}$

Pour $\lambda_3 = 1/3$: D'après la réduite de gauss déterminée en 1.a), on a, pour $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A - \frac{1}{3}I_3\Big)X = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 3x - & 2y + \boxed{z} & = 0 \\ \frac{2}{3}x & \boxed{-\frac{1}{3}y} & = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 2x \\ z = \ \ x \end{array} \right. \quad (x \in \mathbb{R}),$$

Conclusion : $\boxed{E_{1/3} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}}$

c) *Montrons que E_{λ_i} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:* Deux méthodes distinctes s'offrent à nous :

i. *Méthode 1 :* Par caractérisation en écrivant $E_{\lambda_i} = \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) / (A - \lambda_i I_3)X = 0\}$.
— Par définition, $E_{\lambda_i} \subset \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
— $X = 0 \in E_{\lambda_i}$ puisque 0 est une solution évidente du système.
— $\forall X, Y \in E_{\lambda_i}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$,
$$(A - \lambda_i I_3)(\alpha X + Y) = \alpha(A - \lambda_i I_3)X + (A - \lambda_i I_3)Y = \alpha 0 + 0 = 0$$
— ***Conclusion*** : $\boxed{E_{\lambda_i} \text{ est un SEV de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$.

ii. *Méthode 2 :* On exploite la question précédente :
$$E_1 = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},\ E_{1/2} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } E_{1/3} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
On a alors immédiatement que E_1, $E_{1/2}$ et $E_{1/3}$ sont 3 SEV de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ engendrés par des vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Ces vecteurs étant non nuls, on vient d'obtenir une base de chacun de ces SEV qui sont donc de dimension 1.

d) Pour répondre à la question, il suffit de prendre : $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dès lors :
$$R = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Un calcul rapide donne : $\boxed{R^2 = 4\mathrm{Id}}$

Montrons que R est inversible et calculons R^{-1} :

i. Le plus rapide : On écrit que $R^2 = 4\mathrm{Id} \Leftrightarrow R \cdot \frac{1}{4}R = \mathrm{Id} = \frac{1}{4}R \cdot R$.

Conclusion : $\boxed{R \text{ est inversible et } R^{-1} = \frac{1}{4}R = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

ii. Plus calculatoire : Soit X le vecteur colonne de coordonnées x, y, z et Y celui de coordonnées a, b, c. Alors :

$$RX = Y \iff \begin{cases} x - y + z = a & L_1 \\ -2x + 2z = b & L_2 \\ x + \boxed{y} + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x} + 2z = a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ -2x + 2z = b & L_2 \\ x + \boxed{y} + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \boxed{2x} + 2z = a + c & L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ \boxed{4z} = a + b + c & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \\ x + \boxed{y} + z = c & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \\ y = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c \end{cases}$$

$$\iff X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} Y$$

donc, d'après le cours, $R^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

e) Après calculs, obtient : $\boxed{D = R^{-1}AR = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$

② ***Méthode vectorielle***

a) *Montrons que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$*
Par définition, $\mathbb{R}_2[X] \subset \mathbb{R}[X]$. Le polynôme nul est de degré $-\infty$ donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$.
Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(P, Q) \in \mathbb{R}_2^2[X]$. Alors, d'après les règles sur les degrés, on a

$$\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max\{\deg(\lambda P); \deg(\mu Q)\} \leqslant \max\{\deg(P); \deg(Q)\} \leqslant 2,$$

donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_2[X]$. On a ainsi prouvé que

$$\boxed{\mathbb{R}_2[X] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \big(\mathbb{R}[X], +, \cdot\big).}$$

Lu dans le rapport de Jury : « Question bien traitée dans une majorité de copies. Certains se contentent de mentionner le faite que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par combinaison linéaire, c'est juste mais la question était justement de le prouver »

Par ailleurs, on sait, d'après la définition des polynômes, que tout polynôme de $\mathbb{R}_2[X]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$. Cela signifie que

$$\boxed{\mathcal{B} = (1, X, X^2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X]}$$

et donc que : $\boxed{\dim \mathbb{R}_2[X] = 3.}$

b) *À tout élément P de $\mathbb{R}_2[X]$, nous associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ P^*(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t$ et $P^*(0) = P(0)$. Démontrons que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.*

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ de sorte que $P(X) = aX^2 + bX + c$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (at^2 + bt + c)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[a\frac{t^3}{3} + b\frac{t^2}{2} + ct\Big]_0^x = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c$$

et

$$P^*(0) = P(0) = c.$$

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P^*(x) = \frac{a}{3}x^2 + \frac{b}{2}x + c,$$

ce qui prouve bien que

$$\boxed{P^* \text{ est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.}}$$

c) *Nous définissons alors l'application $\varphi : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\varphi(P) = P^*$. Montrons que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.*

Le résultat de la question précédente signifie que $\varphi(\mathbb{R}_2[X]) \subset \mathbb{R}_2[X]$. Reste donc à démontrer la linéarité de φ. Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $P, Q \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\varphi(\lambda P + \mu Q)(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x \big(\lambda P(t) + \mu Q(t)\big)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t + \mu\frac{1}{x}\int_0^x Q(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lambda\varphi(P)(x) + \mu\varphi(Q)(x)
\end{aligned}$$

et

$$\varphi(\lambda P + \mu Q)(0) = (\lambda P + \mu Q)(0) = \lambda P(0) + \mu Q(0) = \lambda\varphi(P)(0) + \mu\varphi(Q)(0),$$

d'où

$$\varphi(\lambda P + \mu Q) = \lambda\varphi(P) + \mu\varphi(Q).$$

En conclusion,

$$\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathbb{R}_2[X].}$$

Lu dans le rapport de Jury : « Si la linéarité en $x \in \mathbb{R}^*$ ne pose que très rarement de problème, celle en $x = 0$ est la plupart du temps omise. »

d) *Calculons la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.*

i. On a vu que, si $P(X) = aX^2 + bX + c$, alors $\varphi(P)(X) = \dfrac{a}{3}X^2 + \dfrac{b}{2}X + c$.
Il s'ensuit que

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi(X) = \frac{1}{2}X \qquad \text{et} \qquad \varphi(X^2) = \frac{1}{3}X^2$$

ii. On a donc $\varphi(P_0) = (1,0,0)_{\mathcal{B}}$, $\varphi(P_1) = (0,1/2,0)_{\mathcal{B}}$ et $\varphi(P_2) = (0,0,1/3)_{\mathcal{B}}$.
et donc :

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = D\cdot}$$

e) *Notons $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ et $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$. Montrons que $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.*

Cette famille est composée de trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3. Il est donc suffisant de montrer qu'elle est libre pour montrer que c'est une base.
Déterminons son rang et pour cela exprimons f_0, f_1 et f_2 dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$:
$f_0 = (X-1)^2 = 1 - 2X + X^2 = (1,-2,1)_{\mathcal{B}}$
$f_1 = (X-1)(X+1) = X^2 - 1 = (-1,0,1)_{\mathcal{B}}$
$f_2 = (X+1)^2 = 1 + 2X + X^2 = (1,2,1)_{\mathcal{B}}$
La matrice de la famille (f_0, f_1, f_2) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R \text{ (ou } \frac{1}{4}R^{-1})$$

Comme cette matrice est inversible (d'après la question 1.c)), on en déduit que son rang est 3.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2) \text{ est une base de } \mathbb{R}_2[X].}$

Lu dans le rapport de Jury : « Le fait que (f_0, f_1, f_2) soit une base de $\mathbb{R}_2[X]$ a été la plupart du temps bien compris, mais il y a trop souvent une confusion entre cardinal et dimension, la dimension de la famille (f_0, f_1, f_2) n'ayant pas de sens. Quelques très bons candidats ont, à ce stade, déjà fait le lien avec la partie précédente, ce qui leur permet de finir cette partie très rapidement. »

Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) la famille des composantes de P dans la base $\mathcal{F}$, exprimons c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$.

Comme (c_0, c_1, c_2) est la famille des composantes de P dans la base $\mathcal{F}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = c_0(x-1)^2 + c_1(x-1)(x+1) + c_2(x+1)^2.$$

En évaluant cette relation en 1 et -1, on obtient

$$P(1) = 4c_2 \qquad \text{et} \qquad P(-1) = 4c_0.$$

Par ailleurs, en dérivant, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P'(x) = 2c_0(x-1) + c_1(x+1) + c_1(x-1) + 2c_2(x+1),$$

ce qui donne, lorsqu'on fait $x = 1$,

$$P'(1) = 2c_1 + 4c_2.$$

On en déduit que

$$\boxed{c_0 = \frac{P(-1)}{4}, \qquad c_1 = \frac{P'(1) - P(1)}{2} \qquad \text{et} \qquad c_2 = \frac{P(1)}{4}.}$$

Lu dans le rapport de Jury : « Beaucoup d'erreurs de calculs dans les expressions des c_i. Notons que la question était d'exprimer c_0, c_1, c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$ et non le contraire, et qu'il est donc de bon ton d'aller au bout des calculs »

f) *Calculons $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ dans la base $\mathcal{F}$ puis écrivons la matrice M' de φ dans la base $\mathcal{F}$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_0)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t-1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[\frac{(t-1)^3}{3}\Big]_0^x = \frac{(x-1)^3+1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 - x + 1,$$

donc, lorsque $P = \varphi(f_0)$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_0)(-1)}{4} = \frac{7}{12}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_0)'(1) - \varphi(f_0)(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_0)(1)}{4} = \frac{1}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_0) = \frac{7}{12}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{1}{12}f_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\varphi(f_1)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t^2-1)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[\frac{t^3}{3} - t\Big]_0^x = \frac{1}{3}x^2 - 1,$$

donc, lorsque $P = \varphi(f_1)$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_1)(-1)}{4} = -\frac{1}{6}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_1)'(1) - \varphi(f_1)(1)}{2} = \frac{2}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_1)(1)}{4} = -\frac{1}{6}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_1) = -\frac{1}{6}f_0 + \frac{2}{3}f_1 - \frac{1}{6}f_2.}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\varphi(f_2)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x (t+1)^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\Big[\frac{(t+1)^3}{3}\Big]_0^x = \frac{(x+1)^3-1}{3x} = \frac{1}{3}x^2 + x + 1,$$

donc, lorsque $P = \varphi(f_2)$, on obtient

$$c_0 = \frac{\varphi(f_2)(-1)}{4} = \frac{1}{12}, \qquad c_1 = \frac{\varphi(f_2)'(1) - \varphi(f_2)(1)}{2} = -\frac{1}{3}, \qquad c_2 = \frac{\varphi(f_2)(1)}{4} = \frac{7}{12}$$

ce qui donne

$$\boxed{\varphi(f_2) = \frac{1}{12}f_0 - \frac{1}{3}f_1 + \frac{7}{12}f_2.}$$

On en déduit que

$$M' = \begin{pmatrix} \frac{7}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{7}{12} \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{M' = A.}$$

Lu dans le rapport de Jury : « Quelques candidats ne réalisent pas qu'ils peuvent utiliser les expressions des c_i calculées précédemmment et perdent donc un temps précieux dans la résolution de systèmes 3×3. Les résultats totalement justes ne sont pas très nombreux. »

g) L'expression de f_0, f_1 etf_2 dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ a déjà été donnée en 2.e). On en déduit que la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{F}$ vaut :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{F}} = R = \frac{1}{4}R^{-1}$$

Si on rappelle par ailleurs que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) = A$ d'après 2.f) et que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = M = D$ d'après 2.d), il suffit de donner la formule dite « de changement de base », à savoir que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = R \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(\varphi) \cdot R^{-1} \Leftrightarrow D = RAR^{-1}$$

Ce n'est pas la formule obtenue en 1.e)... mais en notant que $R = 4R^{-1}$, la formule précédente devient donc : $D = 4R^{-1} \cdot A \cdot \frac{1}{4}R = R^{-1} \cdot A \cdot R$ et c'est exactement la formule obtenue en 1.e).

③ *Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12}, \\ v_{n+1} = \dfrac{-4u_n + 8v_n - 4w_n}{12}, \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{cases}$$

a) *Écrivons une fonction qui calcule, pour un entier naturel n donné, les valeurs de u_n, v_n et w_n et dans le même temps calcule* $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

En Python :

```
def calculTermes(n,a,b,c):
        u,v,w = a,b,c
        for i in range(1,n+1):
                u,v,w = (7*u-2*v+w)/12,(-u+2*v-w)/12,(u-2*v+7*w)/12
        return (u,v,w)
```

et si on veut calculer la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u_n) :

```
def calculTermes(n,a,b,c):
        u,v,w = a,b,c
        S = a
        for i in range(1,n+1):
                u,v,w = (7*u-2*v+w)/12,(-u+2*v-w)/12,(u-2*v+7*w)/12
                S += u
        return S
```

Lu dans le rapport de Jury : « Les questions d'algorithmiques, bien qu'encore largement délaissées sont tout de même plus souvent traitées que les années précédentes. La plupart des programmes sont écrits Python. Un pseudo-langage compréhensible par le correcteur faisait également l'affaire. Si l'utilisation des boucles FOR est bien assimilées, les bornes restent souvent erronées. »

b) *Montrons que, pour tout entier naturel n, on a* $\mathcal{P}(n)$: $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

Procédons par récurrence.

<u>Initialisation :</u> $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $A^0 = I_3$.

<u>Hérédité :</u> Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$A^{n+1}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = AA^n\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7u_n - 2v_n + w_n \\ -4u_n + 8v_n - 4w_n \\ u_n - 2v_n + 7w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix},$$

où la deuxième égalité découle de l'hypothèse de récurrence et la dernière de la définition des suites. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

<u>Conclusion :</u> Par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.}$$

Lu dans le rapport de Jury : « Ici une récurrence était demandée, souvent balayée par un « par une récurrence immédiate ». Pourtant, parmi les candidats qui s'y sont essayés, une bonne moitié initialise la récurrence à $n = 1$ au lieu de $n =^0$. Et quelques (heureusement) rares candidats montrent ne toujours pas avoir compris le principe de récurrence, qui devrait pourtant être assimilé depuis la terminale ».

c) *Déterminons, pour tout entier naturel n, une expression de A^n puis celles de u_n, v_n et w_n en fonction de n et de u_0, v_0 et w_0.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Nous avons vu que $A = RDR^{-1}$, donc

$$\begin{aligned}
A^n &= \underbrace{(RDR^{-1})(RDR^{-1})\cdots(RDR^{-1})}_{n \text{ facteurs } RD'R^{-1}}\\
&= RD\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}D\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}DR^{-1}\cdots RD\underbrace{R^{-1}R}_{=I_3}DR^{-1}\\
&= RD^nR^{-1}.
\end{aligned}$$

Or D étant diagonale, on démontre, à l'aide d'une récurrence immédiate, que

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2^n} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3^n} \end{pmatrix}$$

donc, en effectuant le calcul RD^nR^{-1}, on obtient

$$A^n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{1}{3^n}-1 & 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} \\ \dfrac{2}{3^n}-2 & \dfrac{2}{3^n}+2 & \dfrac{2}{3^n}-2 \\ 1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} & \dfrac{1}{3^n}-1 & 1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n} \end{pmatrix}.$$

Reste alors à multiplier cette matrice par le vecteur colonne ${}^t\begin{pmatrix} u_0 & v_0 & w_0 \end{pmatrix}$, pour obtenir les expresions de u_n, v_n et w_n, ce qui donne

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_n = \dfrac{1}{4}\left[\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)u_0+\left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)v_0+\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)w_0\right] \\ v_n = \dfrac{1}{4}\left[\left(\dfrac{2}{3^n}-2\right)u_0+\left(\dfrac{2}{3^n}+2\right)v_0+\left(\dfrac{2}{3^n}-2\right)w_0\right] \\ w_n = \dfrac{1}{4}\left[\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)u_0+\left(\dfrac{1}{3^n}-1\right)v_0+\left(1+\dfrac{1}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{3^n}\right)w_0\right] \end{cases}}$$

d) *Les suites u, v et w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites respectives.*

Les expressions précédentes nous permettent d'affirmer que

$$\boxed{\lim u_n = \frac{1}{4}(u_0-v_0+w_0), \qquad \lim v_n = -\frac{1}{2}(u_0-v_0+w_0), \qquad \lim w_n = \frac{1}{4}(u_0-v_0+w_0).}$$

Problème 2

Lu dans le rapport de jury : « La première partie, assez classique, a été plutôt bien traitée, malgré le manque de **rigueur** de certaines copies. Les deux dernières parties, plus délicates, n'ont été abordées correctement que dans de très bonnes copies »

1. a) La fonction f est supposée continue sur $\mathbb{R}$ donc sur tout intervalle $[-x, x]$ de $\mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est donc une intégrale définie.

   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*, \text{ l'expression } \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ est définie.}}$

   Lu dans le rapport de jury : « La notion de fonction définie a l'air ésotérique pour certains candidats, qui se contentent de mentionner qu'un produit ou une composée de fonctions définies est défini. Rappelons qu'il ne s'agit pourtant que de vérifier que les fonctions qu'on manipule ont bien un sens. »

   b) La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, le théorème fondamental de l'intégration assure que

   $$\boxed{f \text{ admet des primitives sur } \mathbb{R}.}$$

   Si l'on note F l'une de ces primitives, on a :

   $$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{F(x) - F(-x)}{2x}.}$$

   Lu dans le rapport de jury : « Si la question est la plupart du temps bien traitée, on note quand même trop d'erreurs : une fonction continue possède des primitives, **il n'y a pas besoin qu'elle soit dérivable** »

   c) L'expression de g sur $\mathbb{R}^*$ donnée à la question précédente permet de justifier la continuité de g sur $\mathbb{R}^*$ à l'aide des théorèmes généraux de continuité (somme et quotient de fonctions continues).

   Trois méthodes sont possibles pour démontrer la continuité de g en 0.

   Première méthode : Définition.
   Rappelons que f est continue en 0, à savoir : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall t, |t| \leqslant \eta \Rightarrow |f(t) - f(0)| \leqslant \varepsilon$
   Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}/|x| \leqslant \eta$, on a :
   $$|g(x) - g(0)| = \left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)dt - g(0)\right| = \left|\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x}(f(t) - f(0))dt\right| \text{ car } g(0) = f(0)$$
   Donc :
   - Si $x \geqslant 0$, $0 \leqslant |g(x) - g(0)| \leqslant \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} |f(t) - f(0)|\,dt \leqslant \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} \varepsilon dt \leqslant \varepsilon$
   - Si $x < 0$, $0 \leqslant |g(x) - g(0)| \leqslant \dfrac{-1}{2x}\displaystyle\int_{x}^{-x} |f(t) - f(0)|\,dt \leqslant \dfrac{1}{-2x}\displaystyle\int_{x}^{-x} \varepsilon dt \leqslant \varepsilon$

On a donc montré : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 / \forall x, |x| \leqslant \eta \Rightarrow |g(x) - f(0)| \leqslant \varepsilon$
Conclusion : $\boxed{g \text{ est continue en } 0 \text{ et donc } g \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

Deuxième méthode :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{1}{2}\Big(\frac{F(x) - F(0)}{x - 0} - \frac{F(-x) - F(-0)}{x - 0}\Big),$$

donc g s'écrit comme la moitié de la différence du taux d'accroissement en 0 de la fonction $x \longmapsto F(x)$ et du taux d'accroissement de la fonction $x \longmapsto F(-x)$.
Comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = f(0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{F(-x) - F(-0)}{x - 0} = -f(0),$$

où la seconde limite découle du fait que la dérivée de $x \longmapsto F(-x)$ est $x \longmapsto -f(-x)$. Il s'ensuit que

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \frac{1}{2}\big(f(0) + f(0)\big) = f(0) = g(0),$$

ce qui justifie la continuité de g en 0. En conclusion,
$\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Troisième méthode : Utilisation des développements limités.
Comme F est dérivable en 0, avec $F'(0) = f(0)$, F admet le développement limité suivant à l'ordre 1 en 0 :

$$F(x) \underset{0}{=} F(0) + xF'(0) + \circ(x) \underset{0}{=} F(0) + xf(0) + \circ(x)$$

De là on tire :

$$F(-x) \underset{0}{=} F(0) - xf(0) + \circ(x)$$

Dès lors,

$$g(x) \underset{0}{=} \frac{F(0) + xf(0) - (F(0) - xf(0)) + \circ(x)}{2x} = f(0) + \circ(1) = g(0) + \circ(1)$$

D'où $\underset{x \to 0}{lim} g(x) = g(0)$ et donc $\boxed{g \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Là aussi on note quelquefois une confusion entre fonctions continues et dérivables. De plus, si la continuité sur $\mathbb{R}^*$ n'a posé que peu de problèmes, la continuité en 0 n'a pas été souvent correctement prouvée, une majorité de candidats étant persuadés qu'être continue sur $\mathbb{R}^*$ et définie en 0 suffisait à assurer la continuité sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le prolongement par continuité est souvent évoqué sans vérification, ce qui ne suffit pas à justifier le résultat.* »

d) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g(-x) = \frac{1}{2(-x)} \int_x^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x} \int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = g(x),$$

donc

$$\boxed{g \text{ est paire sur } \mathbb{R}.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« La parité de g est sans doute la question la plus traitée du sujet. »*

Nous allons démontrer que, si f est impaire sur $\mathbb{R}$, alors g est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
Tout d'abord, si f est impaire sur $\mathbb{R}$, on a $f(0) = 0$ donc $g(0) = f(0) = 0$.
Par ailleurs, toujours sous la même hypothèse, effectuons le changement de variable $s = -t = \varphi(t)$ dans l'intégrale définissant g. Ce changement de variable est possible car φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Il donne, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_x^{-x} f(-s)\,(-\mathrm{d}s) = \frac{1}{2x}\int_x^{-x} \big(-f(s)\big)\,(-\mathrm{d}s) = -\frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(s)\,\mathrm{d}s = -g(x),$$

On a donc $2g(x) = 0$, ce qui démontre que $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ g(x) = 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{si } f \text{ est impaire sur } \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ est la fonction nulle sur } \mathbb{R}.}$

Lu dans le rapport de jury : *« La nullité de g dans le cas où f est impaire doit être prouvée, et pas uniquement à l'aide d'un dessin. De plus, il fallait penser à vérifier que $g(0) = 0$ ce qui a rarement été fait. Quelques candidats ayant mal lu le sujet font l'hypothèse f est impaire pour tout le reste du problème, ce qui a pu leur coûter cher. Enfin rappelons qu'il n'y a pas d'analogie avec la parité des nombres entiers, et qu'une fonction peut très bien n'être ni paire ni impaire. »*

e) On a $a(0) = \dfrac{f(0) + f(-0)}{2} = f(0) = g(0)$. Par ailleurs, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{x}\int_0^x \frac{f(t)+f(-t)}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^x f(-t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_0^{-x} f(u)\,(-\mathrm{d}u) && \begin{array}{l}\text{en posant } u = -t = \varphi(t)\\ \text{dans la seconde intégrale}\\ \text{où } \varphi \in \mathcal{C}^1([0,x])\end{array} \\
&= \frac{1}{2x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0} f(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{2x}\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= g(x).
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ a(0) & \text{si } x = 0. \end{cases}}$

Lu dans le rapport de jury : *« Cette question n'a pas posé de problèmes majeurs et est bien faite dans la plupart des copies ».*

f) La fonction a est continue sur $\mathbb{R}$ donc sa primitive qui s'annulle en 0, $A : x \longmapsto \int_0^x a(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $A'(x) = a(x)$.
D'où, grâce à l'expression obtenue en 1.e) g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ et :
$\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = -\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x a(t)dt + \dfrac{1}{x}a(x)$ [Dérivée d'un produit]
ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $xg'(x) = -g(x) + a(x)$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad xg'(x) + g(x) = a(x).}$
Lu dans le rapport de jury : « *Là non plus pas de gros problèmes, certains candidats ayant choisi de résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = a(x)$ pour s'assurer que g en était bien solution, ce qui, tout en étant juste, est plus long* »

g) *Dans cette question seulement, f est supposée dérivable en* 0.
D'après les théorèmes généraux de dérivabilité (somme et composée de fonctions dérivable en 0), on peut affirmer que :

$$\boxed{a \text{ est dérivable en } 0.}$$

De plus, on a :

$$a'(0) = \frac{f'(0) - f'(-0)}{2} = 0.$$

Il s'ensuit que, par application de la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 :

$$a(x) \underset{0}{=} a(0) + a'(0)x + \circ(x) = f(0) + \circ(x).$$

En primitivant ce développement limité, on obtient :

$$\int_0^x a(t)\mathrm{d}t \underset{0}{=} c + f(0)x + \circ(x^2) \text{ où } c \in \mathbb{R}$$

Or, pour $x = 0$, $\displaystyle\int_0^x a(t)dt = 0$ puisqu'il s'agit de LA primitive de a qui s'annulle en 0.
Donc $c = 0$ et $\displaystyle\int_0^x a(t)dt \underset{0}{=} f(0)x + \circ(x^2)$

D'après le résultat de la question e), $g(x) \underset{0}{=} f(0) + \circ(x)$

Conclusion : $\boxed{g \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } g'(0) = 0.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Sur une question aussi facile que la preuve de la dérivabilité en* 0 *de a une justification détaillée est demandée. Quelques copies se contentent pour la dérivabilité des fonctions d'un argument magique du type « par produit / composée de fonctions dérivables, a l'est », tout en laissant clairement entendre qu'ils n'ont pas vraiment idée de quelles fonctions ils parlent et écrivant « composée »quand il s'agit d'un produit et vice-versa. Un certain nombre de candidats vérifient que le taux d'accroissement de a admet bien une limite, il est dommage de se priver ainsi des théorèmes généraux sur la dérivabilité. Les développemements llimités ne sont pas toujours maîtrisés, notamment il est indispensable d'y ajouter un reste du type $\circ(x^n)$ pour que l'égalité soit juste si la fonction n'est pas polynomiale. La dérivabilité de g en* 0 *est rarement correctement justifiée, le théorème d'intégration des développements limités semblant inconnu de beaucoup* *de candidats.* »

h) Pour $x > 0$, on a

$$g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} |t|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{0}(-t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2x}\int_{0}^{x} t\,\mathrm{d}t = \frac{x}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x}{2},$$

donc, comme g est paire sur $\mathbb{R}$, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad g(x) = \frac{|x|}{2}\cdot}$$

On constate que g est dérivable à gauche de 0 avec $g'(0^-) = -1/2$ et que g est dérivable à droite de 0 avec $g'(0^+) = 1/2$. Comme $g'(0^-) \neq g'(0^+)$, on en déduit bien que

$$\boxed{g \text{ n'est pas dérivable en } 0.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *L'intégration d'une valeur absolue demande un soin particulier, absent de beaucoup de copies qui trouvent la fonction nulle pour g. Parmi ceux-ci, les quelques candidats qui arrivent tout de même à prouver que g n'est pas dérivable font preuve d'un manque de recul effarant.* »

2. *Dans cette question, f vérifie* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|$.

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. L'hypothèse dit que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\},\ |f(x) - f(x_0)| < |x - x_0|$.
Or $\lim\limits_{x \to x_0} |x - x_0| = 0$, donc $\lim\limits_{x \to x_0} |f(x) - f(x_0)| = 0$ d'après le théorème d'encadrement des limites, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui justifie la continuité de f en x_0.
Comme x_0 est quelconque dans $\mathbb{R}$, on en déduit bien que

$$\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question a souvent été laissée de côté. Toutefois, si beaucoup de copies mentionnent l'analogie avec le théorème des accroissements finis, il est aussi souvent écrit : « d'après les hypothèses du théorème des accroissements finis, f est continue et dérivable ». Il est **indispensable** à ce niveau **de savoir faire la différence entre les hypothèses d'un théorème et sa conclusion**.* »

b) Si $x = 0$, on a

$$\int_0^1 a(0u)\,\mathrm{d}u = a(0)\int_0^1 \mathrm{d}u = a(0) = f(0) = g(0).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
g(x) &= \frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t && \text{d'après 1. e)}\\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 a(xu)\,x\mathrm{d}u && \text{en posant } t = xu \quad \text{soit } u = \frac{t}{x} = \psi(t)\\
&= \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u && (\text{avec } \psi \in \mathcal{C}^1([0,x])\ )
\end{aligned}$$

En définitive, on a

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Le changement de variable pour $x \neq 0$ est souvent bien fait, il fallait toutefois prendre la peine de vérifier que l'égalité était encore valable pour $x = 0$, ce qui a été rarement fait »*

c) Soient u, v deux nombres réels distincts. On a

$$\begin{aligned}
|a(v) - a(w)| &= \left|\frac{f(v) + f(-v)}{2} - \frac{f(w) + f(-w)}{2}\right| \\
&= \frac{1}{2}|f(v) - f(w) + f(-w) - f(-v)| \\
&\leqslant \frac{1}{2}|f(v) - f(w)| + \frac{1}{2}|f(-w) - f(-v)| && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&< \underbrace{\frac{1}{2}|v - w| + \frac{1}{2}|-w-(-v)|}_{=|v-w|} && \text{par hypothèse,}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\text{pour tous réels distincts } v \text{ et } w,\ |a(v) - a(w)| < |v - w|.}$$

Soient x, y deux nombres réels distincts. On a, d'après b),

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &= \left|\int_0^1 \big(a(xu) - a(yu)\big)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |a(xu) - a(yu)|\,\mathrm{d}u && \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&< \int_0^1 |xu - yu|\,\mathrm{d}u && \text{car } \forall u > 0,\ |a(xu) - a(yu)| < |xu - yu| \\
& && \text{(ce qui se passe en 0 importe peu).}
\end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 |xu - yu|\,\mathrm{d}u = |x - y|\int_0^1 u\,\mathrm{d}u = |x - y|\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}|x - y| < |x - y|,$$

donc

$$\boxed{\text{pour tous réels distincts } x \text{ et } y, \text{ on a } |g(x) - g(y)| < |x - y|.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Cette question a posé problème à bon nombre de candidats. Trop souvent le résultat est forcé, en imposant à l'inégalité triangulaire d'être stricte, ce qui est faux dans le cas général, ou encore avec une inégalité sticte du genre $\left|\int f(x)dx\right| < \int |f(x)|\,dx$, ce qui est faux si f est de signe constant. »*

3. *Soit $\big(\mathcal{C}^0(\mathbb{R}), +, .\big)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles muni des lois usuelles. On considère la fonction Φ qui, à toute fonction f appartenant à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, associe la fonction g définie à la question 1.*

a) Nous avons vu que la continuité de f impliquait celle de g (d'après 1. c)), donc Φ est une application de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ vers $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
Soient $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Alors, si l'on note g_1 et g_2 les fonctions associées respectivement à f_1 et f_2 à la question 1, on a :

$$\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(0) = (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(0) = \lambda_1 g_1(0) + \lambda_2 g_2(0) = \lambda_1 \Phi(f_1)(0) + \lambda_2 \Phi(f_2)(0)$$

et, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) &= (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2)(x)\\ &= \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda_1 \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f_1(t)\,\mathrm{d}t + \lambda_2 \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f_2(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \lambda_1 g_1(x) + \lambda_2 g_2(x)\\ &= \lambda_1 \Phi(f_1)(x) + \lambda_2 \Phi(f_2)(x).\end{aligned}$$

On a donc démontré que $\Phi(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 \Phi(f_1) + \lambda_2 \Phi(f_2)$.

Conclusion : $\boxed{\Phi \text{ est un endomorphisme de } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).}$

Lu dans le rapport de jury : « *La question la plus facile de cette partie, à laquelle il manque souvent la vérification de la linéarité en $x = 0$.* »

b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f \in \operatorname{Ker}\Phi$, c'est-à-dire telle que $\Phi(f) = 0$. Si l'on note g la fonction associée respectivement à f à la question 1, on a donc $g = 0$.
En utilisant le résultat de la question 1. f), on constate alors que la fonction a est nulle sur $\mathbb{R}^*$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(-x) = -f(x)$. Cela signifie donc que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, si f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$, nous avons vu, à la question 1. d), que g est la fonction nulle et donc $f \in \operatorname{Ker}\Phi$. Ainsi,

$$\boxed{\text{le noyau de } \Phi \text{ est l'ensemble des fonctions impaires sur } \mathbb{R}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Si un certain nombre de candidats ont trouvé le bon résultat, c'est souvent en utilisant des équivalences là où il n'y avait que des implications. Le fait qu'une fonction impaire était dans le noyau avait en fait déjà été prouvé plus tôt.* »

c) Si f désigne un élément de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, nous avons vu, à la question 1. d), que la fonction g associée est paire sur $\mathbb{R}$. Cela signifie que l'image de Φ est contenue dans l'ensemble des fonctions paires sur $\mathbb{R}$. Comme la fonction sin n'est pas paire sur $\mathbb{R}$ (le fait qu'elle soit impaire, comme l'indique l'énoncé, ne sert à rien car le contraire d'impaire n'est pas paire !), elle ne peut pas admettre d'antécédent par Φ. Donc

$$\boxed{\text{la fonction sin n'admet pas d'antécédent par } \Phi.}$$

Conclusion : $\boxed{\Phi \text{ n'est pas surjective sur } \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).}$

d) Si f désigne un élément de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, nous avons vu, à la question 1. f), que la fonction g associée est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Comme la fonction $u : x \longmapsto |x-1| + |x+1|$ n'est pas dérivable en -1 et 1, elle ne peut pas admettre d'antécédent par Φ.

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } u \text{ n'admet pas d'antécédent par } \Phi.}$

Lu dans le rapport de jury : « *Seules de très bonnes copies ont réussi à traiter correcterment ces questions (c) et d)). On note souvent des confusions entre ne pas avoir d'antécédant et être dans le noyau d'un endomorphisme. Sans plus d'informations sur l'endomorphisme en question, ces deux problèmes sont a priori indépendants.* »

FIN