MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire et intégration

Le sujet se compose de ***questions de cours*** *et de* ***deux problèmes****. On prendra soin de lire l'ensemble des énoncés avant de commencer à composer.*
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Cours :

① Soit f continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et soit $a \in I$. Que peut-on dire de $F : x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$?

Application : Soit F_1 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F_1(x) = \displaystyle\int_1^x e^{1/t}dt$. Dérivabilité de F_1 et variations ?

② Énoncer le **théorème des accroissement finis** sur un intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.
Application : Montrer en appliquant le TAF à F_1 sur $[1, x]$ que $\forall x \geq 1,\ x-1 \leq F_1(x) \leq e(x-1)$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_1(x)$? Que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F_1(x)/x$?

③ Énoncer le **théorème de changement de variable** sur une intégrale.
Application : Montrer à l'aide d'un changement de variable que $F_1(x) = \displaystyle\int_{1/x}^1 \frac{e^u}{u^2}du$.

④ Énoncer le **théorème d'intégration par parties**.
Application : Montrer que $F_1(x) = xe^{1/x} - e + R(x)$ où $R(x)$ est une intégrale qu'on précisera.
Montrer que $\forall 0 < \dfrac{1}{x} \leq u \leq 1$, on a $\dfrac{1}{u} \leq \dfrac{e^u}{u} \leq \dfrac{e}{u}$. Conclure que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{R(x)}{x} = 0$.
Que vaut $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{F_1(x)}{x}$?

Problème 1 : Réduction d'une matrice

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 7/12 & -1/6 & 1/12 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/12 & -1/6 & 7/12 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -4 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

① **Méthode matricielle**

a) Montrer qu'il existe trois valeurs λ réelles pour lesquelles la matrice $A - \lambda\mathrm{Id}$ est non inversible. On notera désormais λ_1, λ_2 et λ_3 ces trois réels avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

b) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Justifier le fait que les systèmes $(A-\mathrm{Id})X = 0$, $(A-\frac{1}{2}\mathrm{Id})X = 0$ et $(A-\frac{1}{3}\mathrm{Id})X = 0$ admettent tous les trois au moins une solution non nulle. Résoudre alors chacun de ces systèmes.

c) Nous notons désormais E_{λ_i} l'ensemble des solutions du système $(A - \lambda_i \mathrm{Id})X = 0$. Montrer que pour chacun des λ_i, E_{λ_i} est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et en donner la dimension.

d) On note $X_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \\ 1 \end{pmatrix}$ l'élément de E_{λ_i} dont la troisième composante vaut 1.

Soit $R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice des coordonnées de la famille (X_1, X_2, X_3) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer R^2. Montrer que R est inversible et calculer R^{-1}.

e) Que vaut $D = R^{-1}AR$?

② **Méthode vectorielle**

Rappelons que $\mathbb{R}_2[X]$ est l'ensemble des polynômes à coeff. réels de degré inférieur ou égal à 2.

a) Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\big(\mathbb{R}[X], +, .\big)$.
Déterminer une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et en déduire sa dimension.

b) P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$, nous lui associons la fonction P^* définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad P^*(x) = \frac{1}{x}\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad P^*(0) = P(0).$$

Démontrer que P^* est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2.

Nous définissons alors une application φ sur $\mathbb{R}_2[X]$ par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) = P^*$

c) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, à savoir :
(i) $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_2[X]^2$, $\varphi(\lambda P + Q) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$
(ii) $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\varphi(P) \in \mathbb{R}_2[X]$

d) On souhaite montrer que la matrice M de φ dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}_2[X]$ n'est autre que la matrice D de la question 1.d) :

i. On note $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ où $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = X^2$. Déterminer $\varphi(P_0)$, $\varphi(P_1)$ et $\varphi(P_2)$ dans la base $\mathcal{B}$.

ii. On rappelle que la matrice de l'application linéaire φ dans la base $\mathcal{B}$, n'est autre que la matrice des coordonnées de la famille $(\varphi(P_0), \varphi(P_1), \varphi(P_2))$ dans la base $\mathcal{B}$. Conclure sur l'expression de M.

e) Notons $f_0 : x \longmapsto (x-1)^2$, $f_1 : x \longmapsto (x-1)(x+1)$ et $f_2 : x \longmapsto (x+1)^2$.

En notant indifféremment les polynômes et les fonctions polynômes associées, montrer que $\mathcal{F} = (f_0, f_1, f_2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Soit P appartenant à $\mathbb{R}_2[X]$. En notant (c_0, c_1, c_2) ses composantes dans la base $\mathcal{F}$, exprimer c_0, c_1 et c_2 en fonction de $P(1)$, $P(-1)$ et $P'(1)$, dérivée de P en 1.

f) Calculer $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$, $\varphi(f_2)$ et donner l'expression de ces fonctions polynômes dans la base $\mathcal{B}$. Donner ensuite, grâce à la question 2.e) l'expression de $\varphi(f_0)$, $\varphi(f_1)$ et $\varphi(f_2)$ dans la base $\mathcal{F}$. Si on rappelle que la matrice de φ dans la base $\mathcal{F}$ n'est autre que la matrice des coordonnées de la famille $\{\varphi(f_0), \varphi(f_1), \varphi(f_2)\}$ exprimée dans la base $\mathcal{F}$, montrer que cette matrice est la matrice A.

g) *Question pour 5/2 :* Écrire la relation matricielle entre M et A et retrouver le résultat de la question 1.e)

③ **Application à l'étude de trois suites numériques**

Considérons trois suites réelles u, v et w définies sur $\mathbb{N}$ qui vérifient les relations :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 2v_n + w_n}{12}, \\ v_{n+1} = \dfrac{-4u_n + 8v_n - 4w_n}{12}, \\ w_{n+1} = \dfrac{u_n - 2v_n + 7w_n}{12}. \end{cases}$$

a) Écrire une fonction Python `calculTermes(n,a,b,c)` d'argument d'entrée un entier naturel n et trois réels a, b et c respectivement égaux aux trois premiers termes u_0, v_0 et w_0, et qui retourne les valeurs de u_n, v_n et w_n. Transformer cette fonction pour qu'elle retourne $\sum_{k=0}^{n} u_k$.

b) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}.$$

c) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $A^n = RD^nR^{-1}$ ou bien $R^{-1}D^nR$.
En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de u_n, v_n et w_n en fonction de n et des réels u_0, v_0 et w_0.

d) Les suites u, v et w sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leur limite respective.

Problème 2 :

1. **Étude d'une fonction définie par une intégrale**

   Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.

   a) Pour tout réel non nul x, justifier l'existence de l'expression $\dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Nous définissons alors la fonction g par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad g(0) = f(0).$$

b) Justifier l'existence d'une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
F étant l'une des primitives de f sur $\mathbb{R}$, exprimer, pour tout réel x non nul, $g(x)$ à l'aide de la fonction F.

c) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que g est paire.
Que peut-on dire de plus sur g si f est impaire ? Le démontrer (on pensera au changement de variable $s = -t$).

Nous définissons l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}.$$

e) Montrer que $g(0) = a(0)$ et que, pour tout réel non nul x,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x a(t)\,\mathrm{d}t.$$

f) Montrer maintenant que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad xg'(x) + g(x) = a(x).$$

g) Dans cette question seulement, f est supposée dérivable en 0.
Montrer qu'alors a est dérivable en 0.
Puis, à l'aide du développement limité à l'ordre 1 en 0 de a, montrer que g est dérivable en 0 et préciser $g'(0)$.

h) Dans cette question seulement, $f : x \longmapsto |x|$.
Pour tout réel x strictement positif puis, pour tout réel x strictement négatif, calculer l'expression de $g(x)$. Montrer alors que g n'est pas dérivable en 0.

2. **Dans le cas où f « diminue les distances »**

Dans cette question 2., f est une application définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \qquad x \neq y \implies |f(x) - f(y)| < |x - y|.$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Nous pouvons alors associer à f la fonction g définie à la question 1.

b) a désignant toujours l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad a(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2},$$

montrer que, pour tout réel x (changement de variable) : $g(x) = \int_0^1 a(xu)\,\mathrm{d}u$.

c) Montrer que, pour tous réels distincts v et w :

$$|a(v) - a(w)| < |v - w|$$

puis en déduire que, pour tous réels distincts x et y :

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|.$$

- FIN -