9 T.D. Révisions d'intégration

Intégration : Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

Compléments : Sommes de Riemann sur $[0,1]$: $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

Intégrations par parties. Changements de variables.

1 Calcul intégral

Exercice 1 ✶ : Calculer les intégrales usuelles suivantes :

$$a) I = \int_{-2}^{-1} \frac{3}{2x}dx; \quad b) I = \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx; \quad c) I = \int_0^1 te^{-t^2/2}dt; \quad d) I = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(2x)}{3}dx$$

$$e) I = \int_0^\pi \sin^3(x)\cos^4(x)dx; \quad f) I = \int_2^6 \frac{x^2-1}{\sqrt{x^3-3x+1}}dx; \quad g) I = \int_{-4}^{-2} \frac{dx}{x\ln(|x|)}; \quad h) I = \int_{-3}^0 2^{3x+4}dx$$

$$i) I = \int_{1/e}^3 \frac{\sqrt{1+\ln(x)}}{x}dx; \quad j) I = \int_{1/2}^2 \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}dx; \quad k) I = \int_0^\pi \sin^2(x)dx; \quad l) I = \int_{-1}^3 \frac{\cos(x)}{4+\sin^2(x)}dx$$

Exercice 2 ✶ : Les formes rationnelles de la forme $\dfrac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$

$$a) I = \int_{3/2}^4 \frac{1}{x^2-1}dx; \quad b) I = \int_{3/2}^4 \frac{x+3}{x^2-1}dx; \quad c) I = \int_0^5 \frac{1}{x^2+2x+1}dx; \quad d) I = \int_0^5 \frac{x+2}{x^2+2x+1}dx$$

$$e) I = \int_{-2}^2 \frac{1}{x^2+x+1}dx; \quad f) I = \int_{-1}^3 \frac{2x+2}{x^2+x+1}dx;$$

Exercice 3 ✶ : Intégration par parties et changements de variables

$$a) I = \int_{-1}^1 te^t dt; \quad b) I = \int_{-1}^1 t^2 e^{-t^2/2}dt; \quad c) I = \int_1^{1/\sqrt{3}} \frac{\arctan(t)}{t^2}dt$$

$$d) I = \int \ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)dt; \quad e) I = \int \arctan(\sqrt{t})dt;$$

$$f) I(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4}dt \text{ avec } s = u(t) = t^2; \quad g) I(x) = \int_0^x \frac{dt}{\cos^4(t)} \text{ avec } s = u(t) = \tan(t);$$

$$h) I(x) = \int_1^x \frac{dt}{t\sqrt{1+t}} \text{ avec } s = u(t) = \sqrt{1+t}; \quad i) I(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{t}}{(t+1)^2}dt \text{ avec } s = u(t) = \sqrt{t};$$

Exercice 4 : fonctions définies par une intégrale

On cherche à déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \int_0^x (x-t)f(2t)dt + 1$$

① Démontrer que si f est solution du problème, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout x réel.

② En déduire que toute solution f du problème est solution d'une équation différentielle du second degré.

③ Conclure

Exercice 5 : intégrales de Riemann

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right),\ \forall n \geq 1.$

① Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n^2}\right)$

② Montrer que $\forall x \in [0,1],\ 0 \leq x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x.$

③ En déduire la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice 6 ✶✶ : Intégrations par partie et changement de variables

L'objectif est de calculer $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} x \cdot \cos^{2q+1} x dx.$

$\forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, on pose : $I(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$

① Montrer que : $\forall p > 0,\ I(p,q) = \dfrac{p}{1+q}\cdot I(p-1,q+1)$. En déduire que : $I(p,q) = \dfrac{p!q!}{(p+q+1)!}$

② En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2p+1} x \cos^{2q+1} x dx.$

③ On pose $I_n = I(n,n)$. Montrer que : $\forall x \in [0,1],\ x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$.
En déduire que $I_n \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n$ et sa limite.

Exercice 7 ✶✶

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}e^{-t}dt$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1-t)e^{-t}ln(1+t^n)dt$

① Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
✐ Indication : On pourra utiliser, après l'avoir démontré, que $\forall x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$

② Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $I_n = \dfrac{\ln 2}{en} - \dfrac{1}{n}J_n.$

③ Déduire de ce qui précède la limite de la suite (I_n) ainsi qu'un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.