Devoir maison : Intégration

Problème 1 :

Dans ce problème, a est un réel strictement positif et f désigne une fonction de la variable réelle définie sur l'intervalle $[0, a]$, à valeurs réelles, continue et strictement croissante sur $[0, a]$, dérivable dans l'intervalle $]0, a[$ et s'annulant en zéro. La fonction f est alors bijective de $[0, a]$ dans $[0, f(a)]$ et admet une réciproque, notée g.
La fonction g est caractérisée par

$$\forall x \in [0, a]\,, \forall y \in [0, f(a)]\,, y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

On remarquera que g est continue sur l'intervalle $[0, f(a)]$ et strictement croissante sur cet intervalle.

① a) Dans les deux premières questions, on montre que pour tout réel α tel que $0 \leq \alpha \leq a$:

$$(1) \qquad \int_0^\alpha f(x)x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)y = \alpha f(\alpha).$$

i. Justifier que l'on a $g(0) = 0$.

ii. Exemple : on prend $f(x) = x^p$ avec p réel strictement positif ; vérifier la relation (1).

b) Pour tout α réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, on note $\varphi(\alpha)$ la quantité :

$$\varphi(\alpha) = \int_0^\alpha f(x)x + \int_0^{f(\alpha)} g(y)y - \alpha f(\alpha).$$

i. Exprimer la fonction φ à l'aide de f et de primitives de f et de g.

ii. Déduire du 1.b).i. que la fonction φ ainsi définie est continue sur $[0, a]$.

iii. Montrer que φ est dérivable sur $]0, a[$, de dérivée nulle sur $]0, a[$ et en déduire que φ est constante sur $[0, a]$.

iv. Vérifier que $\varphi(0) = 0$ et en déduire l'égalité (1).

② a) Dans cette question, on applique la formule précédente au calcul de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}x$.

i. Soit $P(x) = x^4 + 1$. Montrer que $P(x) = \left(x^2 + x\sqrt{2} + 1\right)\left(x^2 - x\sqrt{2} + 1\right)$.
Pour la suite du problème, démontrer l'identité :

$$\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1} - \frac{x}{x^2 + x\sqrt{2} + 1}\right).$$

ii. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}x = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 - x\sqrt{2} + 1}x.$$

Indication : on utilisera un changement de variable.

iii. En déduire que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x^4+1}x = \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left(3 - 2\sqrt{2}\right) + \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

Indication : on pourra utiliser le changement de variable $u = x\sqrt{2} - 1$ ainsi que la formule valable pour tout réel x, strictement positif :

$$\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Dans cette question, f_0 désigne la fonction définie sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ par $f_0(x) = \sqrt{\tan(x)}$.

i. Montrer que f_0 est strictement croissante sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, continue sur $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ et dérivable sur $\left]0, \dfrac{\pi}{4}\right[$.
Justifier l'existence de la fonction f_0^{-1} et donner l'expression de cette fonction réciproque.

ii. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \text{Arctan}(y^2)y$ par intégration par parties.

iii. En utilisant (1) et **2.b).ii.**, donner la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(x)}x$.

3. Dans cette question, on revient au cas général.
α désigne un réel vérifiant $0 \leq \alpha \leq a$, et β un réel vérifiant $0 \leq \beta \leq f(a)$.

a) Montrer, en distinguant deux cas selon la position relative de β et de $f(\alpha)$ que
$$\int_{f(\alpha)}^{\beta} g(y)y \geq \alpha(\beta - f(\alpha))$$
puis que
$$(2) \qquad \alpha\beta \leq \int_0^{\alpha} f(x)x + \int_0^{\beta} g(y)y.$$

b) Étudier dans l'intervalle $[0, f(a)]$ les variations de la fonction définie par
$$\forall t \in [0, f(a)]\,, h(t) = \alpha t - \int_0^t g(y)y.$$
Calculer la valeur de son maximum et retrouver ainsi la formule (2).

Problème 2 :

Dans ce problème E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle polynôme toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans lui-même ; on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et, pour tout entier naturel d, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On rappelle que, par convention, le degré du polynôme nul est fixé à $-\infty$.

Pout tout élément f de E on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$$

Première partie : exemples
Soit w un réel ; on note f_w l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_w(x) = e^{wx}$ et on note g l'application définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2 - x \text{ si } x \in [1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

① Déterminer pour tout w réel la fonction $T(f_w)$.

② Soit $C = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan, $\mathcal{G}$ la courbe représentative de g dans le repère C et Δ la droite d'équation $x = 1$ dans le repère C

a) Tracer $\mathcal{G}$ et montrer que Δ est un axe de symétrie de $\mathcal{G}$.

b) Déterminer la fonction $T(g)$.
Remarque : On prendra soin de distinguer six cas, selon que $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq x \leq 3$ et $x \geq 3$...

c) Tracer sommairement $\mathcal{G}'$ la courbe représentative de $T(g)$ dans le repère C.

d) Déterminer un axe de symétrie de $\mathcal{G}'$.

e) La fonction $T(g)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Deuxième partie : Étude de T

① Montrer que, pour tout élément f de E l'application $T(f)$ appartient à E et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

② On note T l'application de E dans lui-même définie par $f \longmapsto T(f)$

a) Rappeler pourquoi T est un endomorphisme de E.

b) T est-elle une application surjective ?

③ Montrer que si f est une application de E, bornée sur $\mathbb{R}$, alors $T(f)$ est également une application bornée sur $\mathbb{R}$.

④ Déterminer la parité de $T(f)$ en fonction de la parité de f. *Remarque :* On pourra utiliser le changement de variable $u = -t$...

Troisième partie : Étude de restrictions

① Soit w un réel non nul. On note φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 les fonctions de E définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = cos(wx),\ \varphi_2(x) = sin(wx),\ \varphi_3(x) = xcos(wx) \text{ et } \varphi_4(x) = xsin(wx).$$

On note F_w le sous-espace vectoriel de E engendré par φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4.

a) On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F_w.

b) Calculer $T(\varphi_1)$, ..., $T(\varphi_4)$ [*Penser à des intégrations par partie...*] et en déduire que $T(F_w) \subset F_w$

Dans la suite on note M_w la matrice dans des coordonnées des vecteurs $T(\varphi_k)$ dans la base $\mathcal{B}$ de F_w.

✐ On notera que M_w est la matrice de la restriction T_w de T à F_w définie par : $T_w(f) = T(f)$, $\forall f \in F_w$.

c) Déterminer le rang de M_w selon la valeur de w.

d) En déduire le noyau de T_w selon la valeur de w.

e) L'endomorphisme T_w est-il injectif ?

② Soit (d, n) un couple d'entiers naturels non nuls ; on note ε_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n(x) = x^n$ et ε_0 la fonction constante égale à 1. On rappelle que $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, ...\varepsilon_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

a) Montrer que $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$

Dans la suite, on note A_d la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la restriction, Θ_d, de T à $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :

$$\Theta_d : \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X] \\ f \longmapsto T(f) \end{cases}$$

b) Déterminer A_3. L'endomorphisme Θ_3 est-il bijectif ? On note h le polynôme $2\varepsilon_3 + 6\varepsilon_2 + 8\varepsilon_1 + 4\varepsilon_0$. Résoudre dans $\mathbb{R}[X]$ l'équation $\Theta_3(f) = h$

c) Quelles sont les valeurs de λ pour lesquelles la matrice $A_3 - \lambda I$ est non inversible ? En déduire l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant : $\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} P(t)dt = 2P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Plus généralement, l'endomorphisme Θ_d est-il bijectif ?