Ex 12 - correction.

① Soit $S = \{ M_k = (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2, k \in [\![0, n]\!] \}$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} \in \mathbb{R}_n[X] \;/\; \begin{cases} L_0(x_0) = 1 \\ L_0(x_i) = 0 \end{cases} \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Plus généralement : $\forall k \in [\![0, n]\!]$;

$$\boxed{L_k(x) = \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x - x_i) \right) \Big/ \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} (x_k - x_i)} \in \mathbb{R}_n[X].$$

Note : on a bien $L_k(x_k) = 1$ et $L_k(x_i) = 0 \; \forall i \neq k$

② Il suffit de poser :

$$\boxed{L(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k(x)}$$ pour avoir $L(x_k) = y_k \; \forall k \in [\![0, n]\!]$.

Note : $L \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\mathbb{R}_n[X]$ est un $\mathbb{R}$-EV ...

③ Exemple 1 : $S = \{(-2,3), (1,2), (2,-1), (5,2)\}$

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(-2-1)(-2-2)(-2-5)} = -\frac{1}{84}(x-1)(x-2)(x-5) \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$l_1(x) = \frac{(x+2)(x-2)(x-5)}{(1-(-2))\cdot(1-2)(1-5)} = \frac{1}{12}(x+2)(x-2)(x-5) \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$l_2(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-5)}{(2+2)(2-1)(2-5)} = -\frac{1}{12}(x+2)(x-1)(x-5) \in \mathbb{R}_3[X]$$

$$l_3(x) = \frac{(x+2)(x-1)(x-2)}{7 \cdot 4 \cdot 3} = \frac{1}{84}(x+2)(x-1)(x-2) \in \mathbb{R}_3[X].$$

Enfin :

$\boxed{L = 3l_0 + 2l_1 - l_2 + 2l_3 \in \mathbb{R}_3[X]}$ et passe par chacun des points de S.

④ Exemple 2 : Pour compléter les données manquantes, on décide de considérer la série de données :

$$S = \{(3; 4.7), (4; 4.8), (7; 6.9)\}$$

pour obtenir un polynôme de degré 2 passant par ces trois points.

On obtient ainsi :

$$l_0(x)=\frac{(x-4)(x-7)}{(-1)(-4)}=\frac{1}{4}(x-4)(x-7)=\frac{1}{4}(x^2-11x+28)$$

$$l_1(x)=\frac{(x-3)(x-7)}{1.(-3)}=-\frac{1}{3}(x-3)(x-7)=-\frac{1}{3}(x^2-10x+21)$$

$$l_2(x)=\frac{(x-3)(x-4)}{4.3}=\frac{1}{12}(x-3)(x-4)=\frac{1}{12}(x^2-7x+12)$$

Soit

$$L(x)=4{,}7\,l_0(x)+4{,}8\,l_1(x)+6{,}9\,l_2(x)$$
$$=0{,}15x^2-0{,}95x+6{,}2$$

Conclusion : Si $V(j)$ désigne la vitesse de vent le jour j on estime que :
$V(5)=L(5)=5{,}2\,m.s^{-1}$; $V(6)=L(6)=5{,}9\,m.s^{-1}$

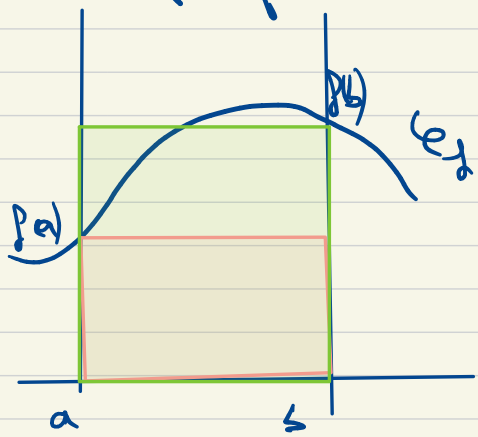
5) Exemple 3 : Soit $f\in\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$..

1] On suppose dans un premier temps que $b=a+h$ avec $h\in\mathbb{R}_+^*$ petit.

Posons $I=\int_a^b f(t)\,dt$.

On sait déjà que :

$$I\approx \boxed{f(a).(b-a)}\approx\boxed{f(b)(b-a)}$$



L'idée est ici de déterminer le polynôme interpolateur de Lagrange passant par les points :
$$S=\{(a,f(a)),(m,f(m)),(b,f(b))\}$$
pour proposer :
$$I=\int_a^b f(x)\,dx\cong\int_a^b L(x)\,dx.$$

D'après ce qui précède, on a :

$$L(x)=f(a)\frac{(x-m)(x-b)}{(a-m)(a-b)}+f(m)\frac{(x-a)(x-b)}{(m-a)(m-b)}+f(b)\frac{(x-a)(x-m)}{(b-a)(b-m)}$$

avec $a-m=-\frac{b-a}{2}\Rightarrow(a-m)(a-b)=(b-a)^2/2$

$\left.\begin{array}{l}m-a=(b-a)/2\\ m-b=-(b-a)/2\end{array}\right\}\Rightarrow(m-a)(m-b)=-(b-a)^2/4$

$b-m=(b-a)/2\Rightarrow(b-a)(b-m)=(b-a)^2/2$

Soit

$$L(x) = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(a)(x-m)(x-b) - 2f(m)(x-a)(x-b) + f(b)(x-a)(x-m)\right]$$

Et donc:

$$\int_a^b L(x)\,dx = \frac{2}{(b-a)^2}\left[f(a)\,I_1 - 2f(m)\,I_2 + f(b)\,I_3\right]$$

avec:

$$I_1 = \int_a^b (x-m)(x-b)\,dx = \int_a^b \left(x^2 - (b+m)x + bm\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - (b+m)\frac{x^2}{2} + bmx\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3} - (b+m)\frac{b^2-a^2}{2} + bm(b-a)$$

$$= (b-a)\left[\frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(b+\frac{a+b}{2}\right)\frac{b+a}{2} + b\,\frac{a+b}{2}\right]$$

$$= \frac{b-a}{12}\left[4a^2+4b^2+4ab - 3\underbrace{(a+3b)(a+b)}_{=a^2+3b^2+4ab} + 6ab+6b^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{12}\left[a^2+b^2-2ab\right] = \frac{(b-a)^3}{12}$$

$$I_2 = \int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = \int_a^b \left(x^2-(a+b)x+ab\right)dx = \left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^b$$

$$= \frac{b^3-a^3}{3} - (a+b)\frac{b^2-a^2}{2} + ab(b-a)$$

$$= \frac{b-a}{6}\left[2(a^2+b^2+ab) - 3(a+b)^2 + 6ab\right]$$

$$= \frac{b-a}{6}\left(-a^2-b^2+2ab\right) = -\frac{(b-a)^3}{6}$$

On obtient de même:

$$I_3 = (b-a)^3/12.$$

Conclusion: $\boxed{I \simeq \int_a^b L(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f(m)+f(b)\right]}$

Vérification $I = \int_{1/2}^{3/2} t e^{-t}\,dt$ est obtenue par I.P.P.:

$$\begin{cases} u(t)=t, & u'(t)=1 \\ v'(t)=e^{-t} & v(t)=-e^{-t} \end{cases}$$ avec $u, v \in C^1([1/2, 3/2])$

Donc

$$I = \left[-te^{-t}\right]_{1/2}^{3/2} + \int_{1/2}^{3/2} e^{-t}\,dt = \left[-(t+1)e^{-t}\right]_{1/2}^{3/2}$$

$$= \frac{e^{-1/2}}{2}\left(3-5e^{-1}\right) \simeq 0{,}35197$$

Et l'approximation donne :

$$I \simeq \frac{1}{6}\left[f\left(\tfrac{1}{2}\right)+4f(1)+f\left(\tfrac{3}{2}\right)\right] \simeq 0{,}3515$$

On a obtenu une valeur approchée à 10^{-3} près de I.

⚠ La bibliothèque "scipy" permet d'obtenir des valeurs approchées d'intégrales. On fera :

```
from scipy import integrate
f = lambda x: x*np.exp(-x)
I1 = integrate.quad(f, 0.5, 1.5)
```

Généralisons : Considérons la subdivision :

$$\sigma = [a_0, a_1, \ldots, a_n) \text{ avec } \begin{cases} a_0 = a \\ a_n = b \end{cases} \text{ et } a_k = a_0 + kh,\ k \in [\![0,n]\!] \text{ où } h = \frac{b-a}{n}.$$

Le cours de BCPST1 assure que :

$$I = \int_a^b f(t)\,dt \underset{n\to\infty}{\approx} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+kh)$$

En posant $m_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$ $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient désormais par linéarité de l'intégrale.

$$I = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\,dx \simeq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\overbrace{a_{k+1}-a_k}^{=h=(b-a)/n}}{6}\left[f(a_k)+4f(m_k)+f(a_{k+1})\right]$$

$$\simeq \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(a_k)+4f(m_k)+f(a_{k+1})\right]$$

$$\simeq \frac{b-a}{6n}\left[f(a)+f(b)+4\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} f(m_k)}_{S_1}+2\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)}_{S_2}\right]$$

calculées avec Python... (cf. feuille ci-jointe).

Rq : Pour $f : x \mapsto xe^{-x}$, $a = 1/2$, $b = 3/2$ et $n = 10$

On obtient une valeur approchée de I à 10^{-8} près...