MATHEMATIQUES
Variables Aléatoires discrètes

Problème 1 : D'après Epreuve AgroA - 2011

Première partie

① a) *Rappelons les relations liant la somme et le produit des racines ω_1 et ω_2 aux coefficients a, b et c de l'équation $(\mathcal{C})$:* Le théorème de factorisation des polynômes donne :

$$ar^2 + br + c = a(r - \omega_1)(r - \omega_2).$$

En développant le second membre, on obtient alors

$$ar^2 + br + c = a(r^2 - (\omega_1 + \omega_2)r + \omega_1\omega_2).$$

On en déduit le résultat par identification des coefficients.

$$\boxed{\omega_1 + \omega_2 = -b/a \quad \omega_1\omega_2 = c/a}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Bien sûr, question globalement réussie... 85% mais pas 100% ! Cependant, les candidats ont intérêt à prendre le temps de lire les questions... aucune preuve n'était attendue, on ne demande pas ω_1 et ω_2 en fonction de a, b et c... Et le coefficient d'une équation du second degé n'est pas toujours égale à 1. »*

b) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (ε_2') sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Posons : $z = y' - \omega_1 y$.
Montrons que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$: Si y est de classe C^2, alors y' est de classe C^1 et z est clairement C^1, en tant que combinaison linéaire de fonctions C^1 et par ailleurs :

$$\begin{aligned} z' - \omega_2 z &= y'' - (\omega_1 + \omega_2)y' + \omega_1\omega_2 y \\ &= \frac{1}{a}(ay'' + by' + cy) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On déduit alors une expression de z du fait que toute solution de l'équation $z' - \omega_2 z = 0$ est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\omega_2 x}$, avec λ un réel.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^{\omega_2 x}.}$$

On vient de prouver que y est solution de l'équation différentielle

$$y' - \omega_1 y = \lambda e^{\omega_2 x} \quad (\star),\ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Or on sait que la solution générale de l'équation homogène associée à $(\star)$ est $\boxed{y_0 : x \mapsto \mu e^{\omega_1 x}}$.
Il ne reste donc plus qu'à déterminer une **solution particulière** de $(\star)$.

D'après la forme du second membre, on sait que $(\star)$ admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{\omega_2 x}$.
alors $y_p'(x) = (P'(x) + \omega_2 P(x))\, e^{\omega_2 x}$. Et donc :

$$y_p'(x) - \omega_1 y_p(x) = (P'(x) + (\omega_2 - \omega_1)P(x))\, e^{\omega_2 x} = \lambda e^{\omega_2 x}$$

Après simplification, on obtient :

$$P'(x) + (\omega_2 - \omega_1)P(x) = \lambda \qquad (\star\star)$$

— *Premier cas :* Si $\omega_1 = \omega_2$, $(\star\star) \Leftrightarrow P'(x) = \lambda \Rightarrow P(x) = \lambda x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Soit $y_p(x) = (\lambda x + b)e^{\omega_2 x} = (\lambda x + b)e^{\omega_1 x}$ une solution particulière (✐ on peut tout à fait envisager de prendre $b = 0$ puisque c'est une solution « particulière »...)

— *Second cas :* Si $\omega_1 \neq \omega_2$ alors $(\star\star) \Rightarrow \deg(P) = 0$.
En posant $P(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, on a $(\star\star) \Leftrightarrow (\omega_2 - \omega_1)a = \lambda \Leftrightarrow a = \dfrac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1}$.
Soit, si y_p solution de $(\star)$, alors $y_p(x) = \dfrac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1} e^{w_2 x}$. On vérifie aisément que la réciproque est vraie...

Conclusion : $\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \begin{cases} \mu e^{\omega_1 x} + \dfrac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1} e^{w_2 x} & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ (\lambda x + \mu)e^{\omega_1 x} & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}}$

Soit :

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2,\ y \text{ est de la forme } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}}$$

et

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2,\ y \text{ est de la forme } x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La résolution de $z' - \omega_2 z = 0$ ne pose pas de souci (pour* 75% *des candidats !) même si la rédaction ne respecte pas souvent la nature des objets... confusion entre ensemble, fonction, valeur de la fonction en un point, même si les phrases utilisées sont incomplètes... « $e^{\omega_2 x}$ est une solution ».*
1/3 *des candidats ne voient pas qu'alors y est solution d'une équation différentielle du premier ordre... première difficulté de deux questions qui s'enchaînent.*
La recherche d'une solution particulière est plus délicate, soit par une méthode de variation de la constante à la présentation technique sans trop savoir ce qui se passe, soit par la proposition d'une solution particulière mais qui n'est pas toujours vérifiée.
Beaucoup de candidats sont passés à côté de cette équation en y et ont donné directement l'expression de y vue en cours.
Mais comme nous l'avons dit ci-dessus, la question demandait clairement de résoudre l'équation en y et ainsi de démontrer le résultat de cours. »

c) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 = \omega_2$. *Montrons que, pour toutes constantes réelles A et B, les fonctions $x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$ sont solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$:*

Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$\begin{array}{l} u'(x) = Ae^{\omega_1 x} + \omega_1(Ax + B)e^{\omega_1 x} \\ u''(x) = 2\omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_1^2(Ax + B)e^{\omega_1 x} \end{array}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$\begin{array}{rcl} au''(x) + bu'(x) + cu(x) & = & e^{\omega_1 x}\left(Ax\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + B\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + A\left(2a\omega_1 + b\right)\right) \\ & = & e^{\omega_1 x}\left(AxP(\omega_1) + BP(\omega_1) + AP'(\omega_1)\right) \end{array}$$

où on a posé $P(r) = ar^2 + br + c$. Mais lorsque $\omega_1 = \omega_2$, dire que ω_1 et ω_2 sont les racines de P c'est dire que ω_1 est une racine double de P. Cela donne $P(\omega_1) = P'(\omega_1) = 0$, ce qui donne le résultat recherché.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } A \text{ et } B, \text{ les fonctions } x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x} \text{ sont solutions de } (\varepsilon_2') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Déduisons-en l'ensemble S_2' des solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$:
On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$Vect\,(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x}) \subset S_2'.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S_2' est de la forme $x \mapsto Axe^{\omega_1 x} + Be^{\omega_1 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question précédente. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2,\ S_2' = Vect\,(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x})}$$

Bonus : Montrons que S_2' est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Déduisons-en que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et donnons-en une base pour conclure sur sa dimension :
On déduit du résultat ci-dessus que S_2' est le sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1 : x \mapsto xe^{\omega_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{\omega_1 x}$ qui sont deux vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Pour démontrer que celui-ci est de dimension 2, il suffit de prouver que la famille (f_1, f_2) est libre. Considérons pour cela deux réels λ_1, λ_2 tels que

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 = 0.$$

Pour tout réel x on a alors

$$\lambda_1 xe^{\omega_1 x} + \lambda_2 e^{\omega_1 x} = 0.$$

En multipliant cette égalité par $e^{-\omega_1 x}$ on obtient

$$\lambda_1 x + \lambda_2 = 0,$$

ce qui donne ensuite $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ par identification des coefficients. D'où le résultat.

$$\boxed{S_2' \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel de dimension 2.}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Les calculs ont été laborieux...*
Et le shéma analyse-synthèse ou double inclusion n'a pas été mis en avant (environ 5% des candidats sont convaincants !), beaucoup se demandent pourquoi on leur fait faire deux fois la même chose.
La structure d'espaces vectoriels a posé beaucoup de difficulté... surtout l'utilisation du théorème de caractérisation. »

d) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 \neq \omega_2$.
Montrons que pour toutes constantes réelles A et B, les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ sont solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$ et déduisons-en l'ensemble S_2' des solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$ dont on admettra qu'il s'agit là aussi d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = \omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2 Be^{\omega_2 x}$$
$$u''(x) = \omega_1^2 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2^2 Be^{\omega_2 x}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = Ae^{\omega_1 x}\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + Be^{\omega_2 x}\left(a\omega_2^2 + b\omega_2 + c\right) = 0.$$

D'où le résultat recherché.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } A \text{ et } B\text{, les fonctions } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x} \text{ sont solutions de } (\varepsilon_2') \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$Vect\,(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}) \subset S_2'.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S_2' est de la forme $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question 1.2. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2,\ S_2' = Vect\,(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})}$$

e) *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - y = xe^x$:*
Il suffit d'utiliser la méthode qui vient d'être établie, en remarquant que l'équation caractéristique associée admet 1 et -1 comme racines.

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } \{x \longmapsto Ae^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}}$
ou encore :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } Vect\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}\right).}$$

Cherchons maintenant une solution particulière y_p : Conformément à l'indication de l'énoncé,

on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.
✐ On peut prendre $c = 0$ puisque $x \longmapsto ce^x$ est solution de l'équation homogène !
Alors :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2ax + b + ax^2 + bx)e^x \\ &= (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= (2ax + (2a + b) + ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \\ &= (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x \end{aligned}$$

D'où :

$$y_p''(x) - y_p(x) = xe^x \Leftrightarrow (4ax + 2a + 2b)e^x = xe^x$$

ou encore

$$4ax + 2a + 2a = x \text{ (multiplication par } e^{-x} \neq 0)$$

Et par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 4a &= 1 \\ 2a + 2b &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1/4 \\ 2b &= -2a = -1/2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'en déduire que $y_p : x \longmapsto \left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4}\right) e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle proposée.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{y = y_0 + y_p : x \longmapsto \left(\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x}{4}\right) e^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}}$

Deuxième partie

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.
Pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y.
Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_3') \; y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.

Notons : $Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $Y' = AY$: On a

$$Y' = AY \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

On voit alors que cette égalité est vraie, puisque y est solution de (ε_3').

$$\boxed{Y' = AY}$$

② Quelques calculs préalable :

a) Soit (S_λ) le système linéaire d'inconnues réelles x, y et z : $\begin{cases}(2-\lambda)x+y-2z & =0\\ x-\lambda y & =0\\ y-\lambda z & =0\end{cases}$

i. *Montrons qu'il existe* 3 *valeurs de* λ *distinctes (nommées par la suite* λ_1, λ_2 *et* λ_3, *avec* $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$*) pour lesquelles* (S_λ) *n'admet pas que la solution nulle :*

$$(S_\lambda)\Leftrightarrow\begin{cases}y & =\lambda z\\ x=\lambda y & =\lambda^2 z\\ ((2-\lambda)\lambda^2+\lambda-2)z & =0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y & =\lambda z\\ x=\lambda y & =\lambda^2 z\\ (2-\lambda)(\lambda^2-1)z & =0\end{cases}$$

Il est dès lors immédiat que (S_λ) admet au moins une solution non nulle si, et seulement si, $(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0$.

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda \text{ n'est pas un système de Cramer pour } (\lambda_1,\lambda_2,\lambda_2)=(-1,1,2)}$

ii. *Résolvons* (S_λ) *pour chacune des valeurs de* λ *obtenues précédemment :*
Déterminons l'ensemble des solutions de (S_{-1}) *:*

$$(S_{-1})\Leftrightarrow(x=z \text{ et } y=-z), \text{ donc } \boxed{\mathcal{S}_{S_{-1}}=\{(z,-z,z),z\in\mathbb{R}\}}$$

de même : $\boxed{\mathcal{S}_{S_1}=\{(z,z,z),z\in\mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{S}_{S_2}=\{(4z,2z,z),z\in\mathbb{R}\}}$

iii. Soit $u_1=(a_1,b_1,1)$ une solution de (S_{λ_1}), $u_2=(a_2,b_2,1)$ une solution de (S_{λ_2}) et $u_3=(a_3,b_3,1)$ une solution de (S_{λ_3}). Déterminer a_1,b_1,a_2,b_2,a_3 et b_3 :
C'est immédiat au regard de la question précédente. on prendra :

$$\boxed{u_1=(1,-,1,1),\ u_2=(1,1,1) \text{ et } u_3=(4,2,1)}$$

b) On pose $P=\begin{pmatrix}a_2 & a_1 & a_3\\ b_2 & b_1 & b_3\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.
Inversons la matrice P *et déterminons la matrice* D *définie par* $D=P^{-1}AP$ *:*

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{cccccc}x & +y & +4z & = & a\\ x & -y & +2z & = & b\\ x & +y & +z & = & c\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{cccccc}x & +y & +4z & = & a & \\ 2x & & +6z & = & a+b & L_2\leftarrow L_2+L_1\\ & & 3z & = & a-c & L_3\leftarrow L_1-L_3\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\quad\left\{\begin{array}{ccccc}y & = & \frac{1}{6}a & -\frac{1}{2}b & +\frac{1}{3}c\\ x & = & -\frac{1}{2}a & +\frac{1}{2}b & +c\\ z & = & \frac{1}{3}a & & -\frac{1}{3}c\end{array}\right.$$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}}$$

Un calcul matriciel immédiat donne alors $\boxed{P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Quelques remarques habituelles sur cette question : présentations mécaniques qui laissent parfois des doutes sur la compréhension, confusion entre taille, dimension, ordre et rang d'une matrice, les colonnes de P ne sont pas toujours ordonnées, le calcul de l'inverse de P est correct dans* 50% *des cas...* »

③ Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$. *Montrons que : $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$:*
On vient d'obtenir que $D = P^{-1}AP$ donc, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a successivement :

$$PD = AP \text{ puis } PDP^{-1} = A$$

Dès lors :

$$Y' = AY = PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par P^{-1} à gauche.

$$\boxed{P^{-1}Y' = DP^{-1}Y}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Trop souvent traitée en effectuant le calcul matriciel...* »

④ **Résolution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.**

a) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.
En notant $z = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$, montrons que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z' = z$, et déduisons-en une expression de z :
y étant une solution de (ε_3'), on en déduit qu'elle est de classe C^1. Il vient alors que z est de classe C^3 en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^1. On peut alors écrire :

$$z' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}(2y'' + y' - 2y) + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = z.$$

$$\boxed{z \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de sorte que } z' = z.}$$

On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $z(x) = \lambda e^x$, pour tout réel x.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^x, \text{ pour tout réel } x.}$$

En déduire une expression de y comme combinaison linéaire de 3 fonctions qu'on déterminera :
On vient de prouver que y vérifie l'équation différentielle $-\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = \lambda e^x$, soit encore

$$(\dagger) \quad -y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à $(\dagger)$ est $-r^2 + r + 2 = 0$, qui admet pour racines -1 et 2 (après calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à $(\dagger)$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}.$$

Quant à la solution particulière, on la cherche sous la forme $y_p(x) = \alpha e^x$ (ou plus généralement, sous la forme $y_p(x) = P(x)e^x$ si on n'a pas idée du degré de P...). Pour déterminer la valeur de α, il suffit de remarquer que l'on a

$$-y_p''(x) + y_p'(x) + 2y_p(x) = 2\alpha e^x,$$

ce qui donne $\alpha = \lambda$ après calcul des dérivées de y_p. Au final, on voit que y est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

$$\boxed{\text{Il existe trois réels } A, B, \lambda \text{ tels que } y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x.}$$

b) *Déterminons alors l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$:*
On vient de prouver que toute solution de (ε_3') est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$, ce qui prouve :

$$S_3' \subset Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x).$$

Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ est bien une solution de (ε_3'), ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= \left(-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad -2\left(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad -\left(-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad +2\left(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{S_3' = Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)}$$

Problème 2 :

Partie I : Premier exemple

Lu dans le rapport de Jury : *Cette partie a été en général assez bien traitée. Il faut toutefois relever certaines erreurs qui ont été commises. L'information sur le modèle a été parfois mal comprise. Par exemple pour la question 1.a), certains candidats affirment que la loi de D_n est la même que celle de D_1. Dans cette même question, on trouve parfois $u_1 = \frac{1}{2}$ (une chance sur deux qu'il y ait un descendant).*
Ces erreurs ne les empêchent pas de continuer et de trouver ensuite les résultats demandés.

1. a) $u_0 = \mathbb{P}(D_0 = 0) = 0$, car $D_0 = 1$ et $u_1 = \mathbb{P}(D_1 = 0) = p_0$, par définition.
   Dans ce premier exemple, après chaque traitement : la cellule est détruite avec une probabilité p_0 ou est conservée avec une probabilité $p_1 = 1 - p_0$. Chaque génération comporte au maximum une cellule, donc pour tout entier n, D_n ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

   b) Si $D_n = 0$, il n'y a plus de cellule à l'instant n. Pour $k \in \mathbb{N}$, aux instants $n + k$ il n'y a aucune cellule, car il n'y a pas de génération spontanée.

2. a) D_1 ne prend que les valeurs 0 ou 1, donc $\{(D_1 = 0), (D_1 = 1)\}$ est un système complet d'événements.
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrivons la formule des probabilités totales :
   $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0|D_1 = 0)\mathbb{P}(D_1 = 0) + \mathbb{P}(D_{n+1} = 0|D_1 = 1)\mathbb{P}(D_1 = 1)$.
   Si $(D_1 = 0)$, alors on a vu que $\forall n \in \mathbb{N},\ (D_{n+1} = 0)$, donc $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0)|D_1 = 0) = 1$.
   Si $(D_1 = 1)$, alors les cellules de la $n + 1$-ème génération de C_0 sont celles de la n-ème génération de l'unique enfant de C_0. Tout revient à prendre comme premier instant l'instant 1 (en fait à décaler la chaîne). Donc $P(D_{n+1} = 0|D_1 = 1) = P(D_n = 0) = u_n$.
   Finalement $\boxed{u_{n+1} = P(D_{n+1} = 0) = p_0 + u_n p_1}$.

   b) On note que (u_n) est une suite arithmético-géométrique.
   La méthode usuelle consiste à chercher $c \in \mathbb{R}$ tel que $c = p_0 + c.p_1 \Leftrightarrow c = \dfrac{p_0}{1 - p_1} = \dfrac{p_0}{p_0} = 1$
   Ici, on nous donne directement $c = 1$ et on nous fait travailler classiquement sur la suite $v_n = 1 - u_n$
   Alors $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - p_0 - p_1 u_n = p_1(1 - u_n) = p_1 v_n$.
   La suite (v_n) est donc géométrique de raison p_1.
   On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = p_1^n v_0 = p_1^n$ et $\boxed{u_n = 1 - p_1^n}$.
   Le réel p_1 est strictement compris entre 0 et 1, donc
   $$\lim_{n\to+\infty} u_n = 1.$$
   Rapport de Jury : *On lit parfois $0 \leq p_1 \leq 1$ ce qui implique que $\lim_{n\to+\infty} p_1^n = 0$...*

   c) Soit $n \in \mathbb{N}$. L'événement $(G > n)$ est réalisé si et seulement si le nombre de descendants à la (n+1)ième génération n'est pas nul, c'est-à-dire l'événement $(D_{n+1} > 0)$ est réalisé. On peut donc considérer que : $(G > n) = (D_{n+1} > 0)$.
   $\mathbb{P}(G > n) = 1 - \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = 1 - u_{n+1} = p_1^{n+1}$.

L'événement $(G > n-1)$ est réunion des événements incompatibles $(G = n)$ et $(G > n)$ (même pour $n = 0$, car alors $\mathbb{P}(G > -1) = 1$). Donc :
$\mathbb{P}(G = n) = \mathbb{P}(G > n-1) - \mathbb{P}(G > n) = (1 - u_n) - (1 - u_{n+1}) = p_1^n - p_1^{n+1} = \boxed{p_0 p_1^n}$.
On note par ailleurs que $G(\Omega) = \mathbb{N}$.
Pour justifier l'existence de $\mathbb{E}(G)$ on étudie la série $\sum n\mathbb{P}(G = n) = \sum p_0 p_1 n p_1^{n-1}$ qui est de même nature que $\sum n p_1^{n-1}$ qui une série géométrique dérivée convergente car $0 < p_1 < 1$
D'où :

$$\mathbb{E}(G) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(G = n) = p_0 p_1 \sum_{n=1}^{+\infty} n p_1^{n-1} = p_0 p_1 \frac{1}{(1-p_1)^2} = \frac{p_0 p_1}{p_0^2}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(G) = \frac{p_1}{p_0}}$.

Remarque : Si on connaît la loi géométrique, il était ici possible de la faire apparaître et de gagner du temps sur les calculs. En effet :
Si on pose $G_1 = G + 1$. Dès lors, $G_1(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(G1 = n) = \mathbb{P}(G = n-1) = p_0 p_1^{n-1}$.
On a donc $\mathbb{E}(G_1) = \frac{1}{p_0} = E(G) + 1$ par linéarité de l'espérance.
D'où $\boxed{\mathbb{E}(G) = \frac{1}{p_0} - 1 = \frac{1 - p_0}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}.}$

Rapport de Jury : *L'égalité des évènements $(G > n)$ et $(D_{n+1} > 0)$ est rarement clairement justifiée. Pour établir ensuite la valeur de $\mathbb{P}(G = n)$ on utilise parfois (bien évidemment à tort) l'indépendance des variables D_n et leur équidistribution*

Partie II : Deuxième exemple

1. $\{(D_1 = k)\}_{0 \leq k \leq 2}$ est un système complet d'événements, utilisons la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = k)\mathbb{P}(D_1 = k).$$

On a déjà vu que $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 0) = 1 = u_n^0$ et $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 1) = u_n$.
Si $((D_1 = 2)$ est réalisé, alors C_0 a 2 enfants C_1^1 et C_1^2.
$(D_{n+1} = 0)$ équivaut à C_1^1 n'a pas d'enfant à la n-ème génération et C_1^2 n'a pas d'enfant à la n-ème génération.
Ces deux événements sont par hypothèse indépendants et ont chacun une probabilité u_n, car chaque enfant a même comportement que C_0.
Donc $\mathbb{P}(D_{n+1} = 0 | D_1 = 2) = \mathbb{P}(D_n = 0)^2 = u_n^2$.

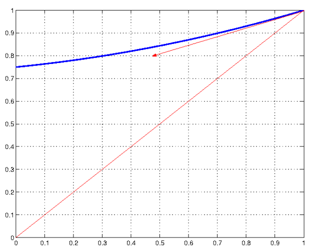
Finalement $u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{2} u_n^k p_k = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2$.

2. a) Soit $x \in [0,1]$: $f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 \geq p_0 > 0$; $f'(x) = p_1 + 2p_2 x \geq p_1 \geq 0$; $f''(x) = 2p_2 > 0$;
$f(1) = p_0 + p_1 + p_2 = 1$; $f'(1) = p_1 + 2p_2 = (1 - p_0 - p_2) + 2p_2 = 1 - p_0 + p_2$.

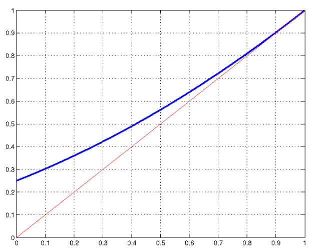
b) On cherche dans les trois cas p_0, p_1 et p_2 tels que : $p_0+p_1+p_2 = 1$ et $(f'(1) < 1 \Leftrightarrow p_2 < p_0)$, $(f'(1) = 1 \Leftrightarrow p_2 = p_0)$ et $(f'(1) > 1 \Leftrightarrow p_2 > p_0)$.

On peut donc considérer les exemples suivants :

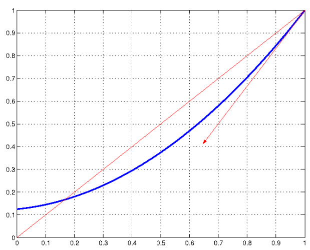
$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{8}x^2$$



$$f(x) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x^2$$



$$f(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}x + \frac{3}{4}x^2$$



Rapport de Jury : *On trouve peu de bonnes représentations graphiques des trois cas : on trouve même des représentations avec $p_0+p_1+p_2 > 1$ ou encore telles que p_0 ou $p_2 = 0$. De plus certains candidats reprennent ces cas particuliers pour traiter la question suivante 2.c)*

c) Appelons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.
Soit $x \in [0,1]$. $f(x) - x = p_0 + (p_1 - 1)x + p_2 x^2 = p_0 - (p_0 + p_2)x + p_2 x^2$
$f(x) - x = p_0(1-x) + p_2 x(x-1) = (1-x)(p_0 - x p_2)$.
Le signe de $f(x) - x$ **est celui de** $p_0 - x p_2$.

Si $f'(1) \leq 1$, (ce qui équivaut à $p_2 \leq p_0$), alors $\forall x \in [0,1]$, $p_0 - x p_2 \geq p_0 - p_2 \geq 0$, donc $f(x) \geq x$ et $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ.

Si $f'(1) = 1$, (ce qui équivaut à $p_2 = p_0$), alors $f(x) - x = p_0(1-x)^2 = p_0(x-1)^2$, d'où : $f(x) = 1 + (x-1) + p_0(x-1)^2 = 1 + (x-1) + o(x-1)$.
L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est donc $y = x$, c'est l'équation de Δ.
Autre méthode : On utilise l'équation de la tangente, à savoir : $y = f(1) + f'(1)(x-1) = 1 + (x-1) = x$ d'après les calculs précédents (C.Q.F.D.).

Si $f'(1) > 1$, (ce qui équivaut à $p_2 > p_0$), alors $f(x) > x \iff x < \dfrac{p_0}{p_2}$.

$\mathcal{C}_f$ est en dessous de la droite Δ pour $x < \dfrac{p_0}{p_2}$, coupe Δ au point d'abscisse $\dfrac{p_0}{p_2}$, puis passe au dessus de Δ... se rapporter au graphe !

d) La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

Posons $a = \min(\dfrac{p_0}{p_2}, 1)$. Alors $f(\dfrac{p_0}{p_2}) - \dfrac{p_0}{p_2} = 0$ et $f(1) - 1 = 0$, donc $f(a) = a$.

Par récurrence on montre facilement que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,a]$.

x	0 $\qquad$ a
$f(x)$	$p_0 \nearrow a$

(en effet l'intervalle $[0,a]$ est stable par f).

On note que sur $[0,a]$ la fonction f est croissante... La suite (u_n) est donc monotone.

Par ailleurs, dans les trois cas étudiés, sur l'intervalle $[0,a]$ on a $f(x) \geq x$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \geq u_n$.

La suite (u_n) est croissante, majorée par a, donc converge vers une limite $l \leq a$.

Rapport de Jury : *Dans la question 2.d) l'erreur fréquemment commise consiste à déduire directement (u_n) croissante de f croissante*

e) f étant continue, l vérifie $f(l) = l$, donc $l = \dfrac{p_0}{p_2}$ ou $l = 1$. Comme $l \leq a$, on a $l = a$.

$\boxed{\text{Le traitement est efficace si et seulement si } a = 1, \text{ c'est à dire } p_0 \geq p_2.}$

3. a) — *Première méthode* :
   On reconnaît le théorème des accroissements finis...
   Pour $x \in [0,a]$: $f \in C^1([x,1])$ donc $\exists c \in]x,1[\ /\ f(1) - f(x) = (1-x).f'(c)$. Or f' est croissante sur $[0,1]$ donc si $x < c < 1$ alors $f'(c) < f'(1)$.
   D'où $f(1) - f(x) \leq (1-x)f'(1)$.
   En notant que $f(1) = 1$ et en prenant $x = u_n \in [0,a]$ on obtient :
   $\boxed{1 - u_{n+1} \leq (1-u_n)f'(1)}$

   — *Seconde méthode* :
   Soit $x \in [0,1]$: $f(x) - 1 = p_0 + (1 - p_0 - p_2)x + p_2x^2 - 1$
   $f(x) - 1 = p_0(1-x) + (x-1) + p_2(x^2 - x) = (1-x)(p_0 - 1 - p_2x)$.
   $f(x) - 1 + (1-x)f'(1) = (1-x)(p_0 - 1 - p_2x + 1 - p_0 + p_2) = p_2(x-1)^2 \geq 0$.
   Or pour tout entier n, $u_n \in [0,1]$, on peut choisir $x = u_n$: $1 - u_n + 1 \leq (1-u_n)f'(1)$.

   Par récurrence immédiate : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ 1 - u_n \leq (1-u_0)f'(1)^n}$

   Rapport de Jury : *Les accroissements finis sont souvent mal utilisés, et ceux qui s'en dispensent se perdent souvent dans les calculs. On trouve également parfois que puisque $f'(1) < 1$ l'inégalité $(1-u_{n+1}) \leq (1-u_n)$ implique $(1-u_{n+1}) \leq f'(1)(1-u_n)$!*

   b) Si $f'(1) = 1$ (ce qui signifie que $p_0 = p_2$), on a :

   $$\forall x \in [0,1],\ \frac{1}{1-f(x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1-p_0+p_0x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{p_0(1-x)}{(1-x)(1-p_0+p_0x)}$$

   $$\frac{1}{1-f(x)} - \frac{1}{1-x} = \frac{p_0}{1-p_0+p_0x} = \frac{p_0}{p_1+p_0(1+x)} \leq 1.$$

   En choisissant $x = u_n$ on obtient $\boxed{\dfrac{1}{1-u_{n+1}} - \dfrac{1}{1-u_n} \leq 1}$ (**).

On en déduit que pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k}) = \frac{1}{1-u_n} - \frac{1}{1-u_0}$ par application des télescopages. D'où :
$\sum_{k=0}^{n-1}(\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k}) = \frac{1}{1-u_n} - 1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n$ d'après (**).
Donc $\frac{1}{1-u_n} \leq n+1$ et comme les deux membres de l'inégalité sont positifs, $1-u_n \geq \frac{1}{n+1}$.

c) $E(D_1) = 0\mathbb{P}(D_1 = 0) + 1\mathbb{P}(D_1 = 1) + 2\mathbb{P}(D_1 = 2) = p_1 + 2p_2 = f'(1)$.
On a déjà vu que $\mathbb{P}(G > n) = \mathbb{P}(D_{n+1} > 0) = 1 - \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = 1 - u_{n+1}$.

4. Se rapporter au T.D. 'variables aléatoires'... Si la variable aléatoire X a une espérance :

a) Soit $N \geq 1$. $\sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{N} k[\mathbb{P}(X > k-1) - \mathbb{P}(X > k)]$

$$= \sum_{k=1}^{N}[(k-1)\mathbb{P}(X > k-1) - k\mathbb{P}(X > k)] + \sum_{k=1}^{N}\mathbb{P}(X > k-1)$$

$$= 0 - N\mathbb{P}(X > N) + \sum_{k=1}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) \qquad C.Q.F.D$$

b) $0 \leq N\mathbb{P}(X > N) = N\sum_{k=N+1}^{+\infty}\mathbb{P}(X = k) \leq \sum_{k=N+1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = R_N$.

c) $\lim_{N\to+\infty} R_N = 0$ car c'est le reste d'une série convergente. Donc $N\mathbb{P}(X > N)$ est compris entre 0 et R_N qui tend vers 0. Par encadrement $\lim_{N\to+\infty} N\mathbb{P}(X > N) = 0$.
Or $\sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) + N\mathbb{P}(X > N)$. Donc la série de terme général $\mathbb{P}(X > N)$ converge et $\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = E(X)$.

5. Dans cette question on a besoin d'une réciproque du lemme :
Supposons que la série de terme général $\mathbb{P}(X > k)$ converge. Alors :
$\forall N \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=0}^{N} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) - N\mathbb{P}(X > N) \leq \sum_{k=0}^{N-1}\mathbb{P}(X > k) \leq \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k)$.
La série de terme général positif $k\mathbb{P}(X = k)$ converge, X admet une espérance. On a alors vu que $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X > k)$.

<u>Si $f'(1) < 1$</u>, alors $0 \leq \mathbb{P}(G > k) = 1 - u_{k+1} \leq f'(1)^{k+1}$.
La série géométrique de terme général $f'(1)^{k+1}$ converge, car $f'(1) < 1$. Donc la série de terme général $\mathbb{P}(G > k)$ converge (théorème de comparaison pour une série à termes positifs).
De plus $0 \leq k\mathbb{P}(G > k) \leq kf'(1)^{k+1}$. Par encadrement $\lim_{k\to+\infty} k\mathbb{P}(G > k) = 0$.

La réciproque du lemme nous permet d'affirmer que G admet une espérance et
$E(G) = \sum_{k=0}^{+\infty}(1 - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1 - u_k)$. De plus $E(G) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} f'(1)^k = \dfrac{f'(1)}{1 - f'(1)}$.

<u>Si $f'(1) = 1$</u>, alors $1 - u_n > \dfrac{1}{n+1}$. La série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$ diverge. Le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs nous permet d'affirmer que la série de terme général $\mathbb{P}(G > n)$ diverge.
On utilise la contraposée du lemme : $\boxed{G \text{ n'a pas d'espérance.}}$