5 Concepts de base des probabilités.

Les objectifs : Modéliser une expérience aléatoire au moyen d'une probabilité ; calculer la probabilité d'un événement ; exploiter une hypothèse d'indépendance pour calculer des probabilités.

Exercice 1 ✶ :

En supposant l'équiprobabilité d'avoir, à chaque naissance, un garçon ou une fille, on considère les évènements $A =$ « la famille a un enfant de chaque sexe » et $B =$ « il y a au plus une fille ».
En vous restreignant aux familles de deux enfants puis de trois enfants, étudiez l'indépendance de ces deux événements.

Exercice 2 ✶ :

On s'intéresse au risque qu'un foetus développe le syndrome dit *de Down* (trisomie 21). Il existe des tests prénataux permettant de déceler si le foetus est effectivement atteint par la maladie mais ils sont invasifs (analyse des cellules du trophoblaste, ponction de liquide amniotique) et peuvent provoquer davantage d'avortements qu'ils ne décèlent de victimes du syndrome.
En moyenne, une naissance sur 700 est atteinte par le syndrome de Down si l'on ne tient pas compte de l'age de la future mère.
La méthode la plus fréquente pour évaluer si une grossesse est à risque est d'effectuer des dosages d'hormone H.C.G. ou d'alpha-foetoprotéine *via* des prises de sang tout en sachant que d'autres facteurs peuvent être à l'origine de taux anormalement élevés.
Des études ont montré qu'une trisomie sur quatre engendre des taux anormaux tandis qu'un taux hors norme se rencontre dans une grossesse exempte de syndrome sur cent...
Déterminer, lorsque le test sanguin a révélé un taux anormal, le risque que le foetus soit effectivement atteint de trisomie 21.

Exercice 3 ✶ :

Cosme II de Médicis (Florence 1590-1621), Duc de Toscane, soumet le problème suivant à Galilé. Il a observé qu'en lançant simultanément trois dés cubiques distincts et en faisant la somme des numéros des faces, on obtient plus souvent 10 que 9 alors qu'il y a autant de façon d'obtenir 9 que 10 avec trois dés.

① Écrire une fonction Python qui permet de vérifier ce paradoxe.

② Expliquer ce phénomène.

Exercice 4 ✶ : Coïncidences

Soit $n \geq 2$. On dispose de n cartons numérotés de 1 à n. On prend un carton au hasard. Si on obtient le carton n°i, pour $i \in \{1, \cdots, n\}$, on place alors dans une urne i boules blanches et $n-i$ boules noires. On tire alors successivement et avec remise deux boules de cette urne.

① Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?

② On a tiré deux boules blanches. Quelle est la probabilité d'avoir pris le carton n°i ?

Exercice 5 ✶✶ : A nouveau des coïncidences

Soit n un entier supérieur à 2. On dispose d'une urne contenant $n-1$ boules numérotées de 1 à $n-1$ et de n caisses $C_1, C_2, \cdots, C_n$. Pour tout i compris entre 1 et n, la caisse C_i contient i jetons numérotés de 1 à i.
On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée porte le numéro i, on tire un jeton de la caisse C_i et un jeton de la caisse C_{i+1}. On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

① Quelle est la probabilité p_2 du succès lorsque $n = 2$?

② Quelle est la probabilité p_n du succès lorsque $n > 2$?

③ **a.** Montrer que pour tout entier naturel k non nul, l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

est vraie.

b. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Monter que : $\forall n \geq 1$, $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_{n-1} < S_n$.

c. En déduire un équivalent au voisinage de l'infini de S_n

d. Donner un équivalent au voisinage de l'infini de p_n.

Exercice 6 ✶ :

Un logiciel informatique permet de retourner un nombre entier naturel au hasard de manière aléatoire et on note ω_n le résultat : « obtenir l'entier n ».

Soit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $p_n = \frac{1}{n!e}$.

① Montrer qu'il existe une unique probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ telle que $\mathbb{P}(\omega_n) = p_n$.

② Après avoir tiré un nombre aléatoire k avec ce programme, on tire une boule dans une urne composée de k boules blanches et une noire.
Calculer la probabilité d'obtenir la boule noire.

Exercice 7 ✶✶ :

Des personnes se transmettent une information. Chaque personne transforme l'information reçue en son contraire avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$) et la transmet fidèlement avec la probabilité $q = 1 - p$.
On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_n la probabilité que la n-ième personne reçoive l'information non déformée (ce qui ne veut pas dire que la n-ième personne transmet fidèlement le message...). On pose $p_1 = 1$.

① Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, p_{n+1} en fonction de p_n.

② En déduire que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique puis exprimer p_n en fonction de n et de p.

③ Calculer $\underset{n\to\infty}{lim}\, p_n$. Que remarque-t-on ?

Exercice 8 ✶ :

Un jeune arbre fruitier produit au printemps entre 0 et 4 fruits, avec les probabilités suivantes :

Nombre de fruits	0	1	2	3	4
Probabilité	1/4	3/8	1/8	1/8	1/8

① Soit X variable aléatoire égale au nombre de fruits produits par l'arbre. Déterminer sa fonction de répartition F_X et en donner une représentation graphique.

② Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 9 ✶✶ :

Une urne contient une boule verte et une boule rouge. On effectue des tirages successifs selon la procédure suivante : on tire une boule ; si elle est rouge on arrête les tirages, si elle est verte on la remet dans l'urne en ajoutant une boule rouge. On note X le nombre de tirages effectués. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note V_k (respectivement R_k) l'évènement : « le k-ième tirage donne une boule verte (respectivement rouge) ».

① $\forall n \geq 2$, calculer la probabilité $\mathbb{P}(V_n|V_1 \cap \cdots \cap V_{n-1})$. En déduire $\mathbb{P}(X > k)$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

② Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $p_l = \mathbb{P}(X = k)$. Vérifier que X est bien une variable aléatoire réelle en montrant que la série $\sum p_k$ converge et que $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$.

③ On admet que, pour justifier l'existence de l'espérance d'une variable aléatoire dénombrable infinie X, il suffit de vérifier la convergence absolue de la série $\sum k\mathbb{P}(X = k)$ et que sous cette condition, $\mathbb{E}(X) = \sum_{k\in X(\Omega)} k\mathbb{P}(X = k)$.
Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 10 ✶✶ :

Soit un nombre réel $p \in]0, 1[$. On réalise une suite de lancers d'une pièce, chaque lancer amenant « pile » avec la probabilité p ou « face » avec la probabilité $q = 1 - p$. Pour tout entier naturel k non nul, soit l'événement A_k : « on obtient pour la première fois Pile suivi de Face aux lancers k et $k + 1$ ».

① Calculer $\mathbb{P}(A_1)$ et $\mathbb{P}(A_2)$.

② A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que pour tout $k \geq 2$, on a : $\mathbb{P}(A_k) = q \cdot \mathbb{P}(A_{k-1}) + p^k q$.

③ En faisant intervenir la suite (u_k) définie, pour tout entier $k \geq 2$, par $u_k = \dfrac{\mathbb{P}(A_k)}{q^k}$, déterminer $\mathbb{P}(A_k)$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 (✐ On pensera à étudier le cas particulier : $p = q = 1/2$).

④ Vérifier que les A_k forment un système quasi-complet d'événements.

Exercice 11 ✶✶ ✶ :

On effectue des tirages dans une urne contenant initialement a boules blanches et b boules noires. Après chaque tirage, la boule est remise dans l'urne avec c boules de la même couleur.

① Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité p_n que la première boule blanche soit obtenue au n-ième tirage.

② On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{b+kc}{a+b+kc}$. Montrer qu'on a $p_n = a_{n-1} - a_n$ pour tout $n \geq 2$.

③ **a.** Montrer que $\ln(a_n) = -\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ où $u_k = \ln\left(1 + \dfrac{a}{b+kc}\right)$

b. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{a}{c} \cdot \dfrac{1}{n} = v_n$

c. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, 0 < \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{3}{2}$ et que la série de terme général u_n diverge. Conclure sur $\underset{n\to\infty}{lim}\, a_n$.

④ En déduire, après avoir regardé sa somme partielle, la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} p_n$ ainsi que sa somme. Interpréter.