

4

T.D. séries numériques réelles



Les objectifs : Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente. Combinaison linéaire de séries convergentes.

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.

Convergence et somme de la série géométrique et de ses dérivées.

Convergence et somme de la série exponentielle.

Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Convergence absolue.

Exercice 1 ♥ : Reconnaître les séries usuelles

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\begin{array}{llll}
 a) \sum_{n \geq 0} \sqrt{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n; & b) \sum_{n \geq 0} \frac{n}{3^n}; & c) \sum_{n \geq 1} \sin(n); & d) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n!} \\
 e) \sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{3^n n!}; & f) \sum_{n \geq 0} -5 (\ln(2))^n; & g) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + n + 1}{4^n}; & h) \sum_{n \geq 1} \ln^2(n) \\
 i) \sum_{n \geq 0} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}; & j) \sum_{n \geq 0} \frac{n^3 2^n + n^2 3^n}{n!}
 \end{array}$$

Remarque : Dans le cas j), on montrera au préalable que $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$.

Exercice 2 ★ : Reconnaître les séries télescopiques

Déterminer la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1+2+\dots+n}; \quad b) \sum_{n \geq 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}; \quad c) \sum_{n \geq 1} \ln \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \right); \quad d) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin \frac{1}{n(n+1)}}{\cos \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n+1}}$$

Exercice 3 ★ : Appliquer le théorème de comparaison

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 a) \sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{3^{n+2}}; & b) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n}; & c) \sum_{n \geq 0} \frac{n \arctan n}{e^n}; \\
 d) \sum_{n \geq 0} \frac{2n-10}{(n+1)^3}; & e) \sum_{n \geq 0} \frac{1+\sin n}{n!}; & f) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n+\ln n}
 \end{array}$$

Exercice 4 ★ : Savoir utiliser la convergence absolue

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\text{a) } \sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{n + 2^n}; \quad \text{b) } \sum_{n \geq 0} \frac{(-3)^n}{2^n + 4^n}$$

Exercice 5 ★★ : Équivalences et théorème de comparaison

On souhaite faire l'étude de la suite d'Euler définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

① On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.

Montrer que les développements limités usuels permettent d'obtenir que :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

② Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0, \frac{1}{2} \leq \frac{|v_n|}{1/2n^2} \leq \frac{3}{2}$.

③ En déduire que la série de terme général v_n converge.

④ Montrer que la suite (u_n) converge et en déduire que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercice 6 ★★ :

Soit $x \in [-1, 1[$.

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout t de $] -1, 1[$, $\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k = \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

② En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, x]$, $\left| \frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^n t^k \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{1-x}$

③ Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| -\ln(1-x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} \right| \leq \frac{1}{(n+2)(1-x)}$

④ En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$