MATHEMATIQUES
Analyse-Statistiques-Dénombrements

Exercice :

Pour tout entier n on définit f_n par $f_n(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ $f_n(x) = \dfrac{x^n lnx}{x^2-1}$

1. a) C'est du cours : $ln(1+u) \underset{0}{=} u - \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{3} + o(u^3)$
   Par ailleurs :
   $$\frac{1}{2+u} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\frac{u}{2}} \underset{0}{=} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u}{2} + \left(\frac{u}{2}\right)^2 + o(u^2)\right)$$
   $$\underset{0}{=} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + o(u^2)\right).$$

   b) *Donnons le développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 1 de f_0 puis de f_n pour $n \geq 1$:*
   On a par hypothèse : $f_0(x) = \dfrac{lnx}{x^2-1}$. Puisqu'on souhaite un développement limité au voisinage de 1, posons $u = x-1$ car u tend vers 0 quand x tend vers 1. Alors :
   $$f_0(x) = f_0(1+u) = \frac{ln(1+u)}{(1+u)^2-1} = \frac{ln(1+u)}{2u+u^2} = \frac{ln(1+u)}{u(2+u)}$$
   $$\underset{0}{=} \frac{u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^3)}{u(2+u)} \underset{0}{=} \frac{1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + o(u^2)}{(2+u)} = \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + o(u^2)\right) \cdot \frac{1}{2+u}$$
   $$\underset{0}{=} \left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{3} + o(u^2)\right) \cdot \frac{1}{2}\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} + o(u^2)\right) \text{ d'après 1.a)}$$
   $$\underset{0}{=} \frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{5u^2}{12} + o(u^2)$$
   Conclusion : $\boxed{f_0(x) \underset{1}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{5(x-1)^2}{12} + o((x-1)^2)}$

   Pour f_n il suffit de noter que $f_n(x) = x^n \cdot f_0(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   Posons cette fois encore $u = x-1$. Alors :
   $$f_n(x) = f_n(1+u) = (1+u)^n \cdot f_0(1+u)$$
   $$\underset{0}{=} \left(1 + nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + o(u^2)\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{u}{2} + \frac{5u^2}{12} + o(u^2)\right)$$
   $$\underset{0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(n-1)u + \left(\frac{5}{12} - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{4}\right)u^2 + o(u^2)$$
   Conclusion : $\boxed{f_n(x) \underset{0}{=} \dfrac{1}{2} + \dfrac{n-1}{2}(x-1) + \dfrac{3n^2-9n+5}{12}(x-1)^2 + o((x-1)^2)}$

c) *Montrons que, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est dérivable en* 1 :
D'après la question 1.b), f_n admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 1 donc $\boxed{f_n \text{ est dérivable en } 1}$ et $\boxed{f_n'(1) = \dfrac{n-1}{2}}$.

d) Toujours d'après la question 1.b) $(\mathcal{C}_n)$ admet pour tangente en 1 la droite d'équation :
$$y = \frac{1}{2} + \frac{n-1}{2}(x-1)$$
La position de $(\mathcal{C}_n)$ par rapport à cette tangente est donné par le signe de $\dfrac{3n^2-9n+5}{12}$ qui est du signe de $3n^2 - 9n + 5$.

Étudions le signe de $P(x) = 3x^2 - 9x + 5$ dont le discriminant vaut $\Delta = 21 > 0$.
P admet deux racines qui sont $x_1 = \dfrac{9-\sqrt{21}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{9+\sqrt{21}}{6}$.
On en déduit que $P(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty[$.
Or $4 < \sqrt{21} < 5$ puisque $4^2 < 21 < 5^2$ et la fonction $\sqrt{\ }$ est croissante.
Donc $\dfrac{4}{6} < x_1 < \dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{13}{6} < x_2 < \dfrac{14}{6}$ ou encore : $0 < x_1 < 1$ et $2 < x_2 < 3$.

On en déduit que $P(n) \geq 0$ si $n = 0$ ou $n \geq 3$ et $P(n) < 0$ si $n = 1$ ou $n = 2$.

Conclusion : $\boxed{(\mathcal{C}_n) \text{ est au-dessus de sa tangente en 1 si } n = 0 \text{ ou } n \geq 3\text{, en-dessous sinon}}$

2. a) Pour un entier naturel n fixé, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, respectivement $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto lnx$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2-1}$.
D'après la question 1.c) on sait que f_n est dérivable en 1.

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}_+^*}$

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$,
$$f_n'(x) = \frac{nx^{n-1}lnx + x^{n-1}}{x^2-1} - \frac{2x^{n+1}lnx}{(x^2-1)^2} = \frac{x^{n-1}[(x^2-1)(nlnx+1) - 2x^2lnx]}{(x^2-1)^2}$$
Et on rappelle que $f_n'(1) = \dfrac{n-1}{2}$

b) *Montrons que, pour $n \geq 1$, f_n est prolongeable par continuité en une fonction g_n* :
Puisqu'on sait déjà que f_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ (puisque dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$), il s'agit bien ici de montrer que f_n est prolongeable par continuité en 0...
Or, $\dfrac{1}{x^2-1} \underset{x\to 0}{\sim} -1$ donc $f_n(x) \underset{x\to 0}{\sim} -x^n lnx$ et $\underset{x\to 0}{lim} f_n(x) = \underset{x\to 0}{lim}(x^n lnx) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Posons $g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est prolongeable par continuité en } g_n}$

Dérivabilité de g_n en 0 ? On étudie

$$\lim_{x\to 0}\frac{g_n(x)-g_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f_n(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{n-1}lnx}{x^2-1}=\lim_{x\to 0}f_{n-1}(x)$$

D'où :

Si $n=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g_n(x)-g_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f_0(x)=\lim_{x\to 0}\frac{lnx}{x^2-1}=+\infty$

Si $n\geq 2$, $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{g_n(x)-g_n(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}f_{n-1}(x)=0$

Conclusion : $\boxed{g_n \text{ est dérivable en 0 si } n\geq 2\text{, non dérivable en 0 si } n=1}$

3. a) Soit φ_0 définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi_0(x)=1-\dfrac{1}{x^2}-2lnx$.
φ_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_0'(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{x}=\dfrac{2(1-x^2)}{x^3}$ donc $\varphi_0'(x)$ est du signe de $1-x$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\varphi_0(x)=-\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\varphi_0(x)=+\infty$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$\varphi_0'(x)$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	
$\varphi_0(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Pour faire le lien avec le signe de $f_0'(x)$, il suffit de noter que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$:

$$f_0'(x)=\frac{1}{x(x^2-1)}-\frac{2xlnx}{(x^2-1)^2}=\frac{x}{(x^2-1)^2}\left[1-\frac{1}{x^2}-2lnx\right]=\frac{x}{(x^2-1)^2}\cdot\varphi_0(x)$$

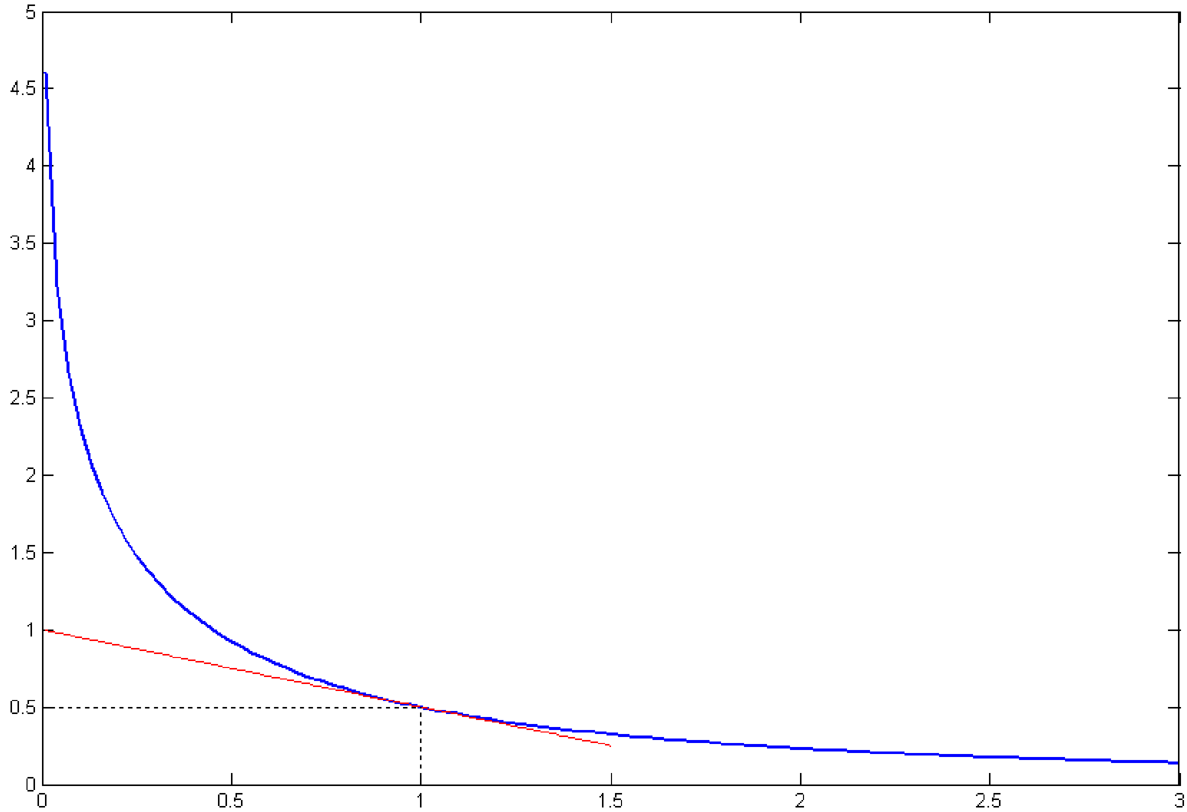
Or $\varphi_0(x)\leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ***Conclusion*** : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\},\ f_0'(x)\leq 0}$.

b) Les variations de f_0 en découlent...
On rappelle en effet que $f_0'(1)$ existe et vaut $-\dfrac{1}{2}$ d'après la question 1.b).
f_0 est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\displaystyle\lim_{x\to 0}f_0(x)=\lim_{x\to 0}\frac{lnx}{x^2-1}=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f_0(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx}{x^2-1}=0$ car $lnx=o(x^2)$

Résumons sous la forme d'un tableau de variation :

x	0		1		$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$		$-1/2$		$-$
$f_0(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$1/2$	$\searrow$	0

D'après 1.d), on sait que $(\mathcal{C}_0)$ admet la droite d'équation $y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{x-1}{2} = -\dfrac{x}{2} + 1$ pour tangente en $x = 1$ et que $(\mathcal{C}_0)$ est au dessus de la tangente en ce point. On peut donc tracer la représentation graphique demandée (on choisit une unité de 5 cm)



Problème 1 : Séries numériques

1. Étude de la somme d'une série

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

① *Quel est le résultat de cours qui permet d'affirmer que la suite (S_n) converge ? Le montrer :*

Le cours nous assure que la série de terme général $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge. Autrement dit la suite (S_n) converge.
Démontrons-le :
$\forall k \geq 2,\ 0 < \dfrac{1}{k^2} \leq \dfrac{1}{k(k-1)}$ car $k^2 \geq k(k-1)$ et la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Or, si on pose $\sum \dfrac{1}{k(k-1)} = (T_n)$ où

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 - \frac{1}{n} \text{ par télescopage}$$

alors il est immédiat que la suite (T_n) converge vers 1, autrement dit,

$$\text{La série } \sum \frac{1}{k(k-1)} \text{ converge de somme égale à 1.}$$

Par théorème de convergence par comparaison des séries à termes positifs, on a donc :

Conclusion : $\boxed{\text{La séries } \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge ou encore } (S_n) \text{ converge}}$.

Dans la suite du problème, on notera $l = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$.

② *Écrivons une fonction Python* **`sommeP(n)`** *qui prend en argument n et qui renvoie la valeur de S_n :*

```
def sommeP(n):
    return sum([1/k**2 for k in range(1,n+1)])
```

③ a) Soit $f : t \longmapsto \frac{1}{t^2}$.

Pour répondre à la question, il suffit de dire que la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et qu'en conséquence :

$$\forall t \in [k, k+1],\ f(t) \leq f(k)$$

En intégrant de chaque côté de l'inégalité, les bornes d'intégration étant dans le « bon »sens, on obtient :

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k) \int_k^{k+1} dt = f(k)$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [k, k+1],\ \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{1}{k^2}}$

Montrons plus généralement que pour tout entier $k \geq 2$, on a : $\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt$

On a déjà obtenu l'inégalité de gauche. Il suffit donc d'obtenir celle de droite, et pour ça de noter grâce à la décroissance de f que :

$$\forall t \in [k-1, k],\ f(t) \geq f(k)$$

et par passage à l'intégrale, les bornes étant dans le bon sens :

$$\int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt \geq \int_{k-1}^{k} f(k)dt = f(k) = \frac{1}{k^2}$$

Conclusion : $\boxed{\int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt}$

b) Soit p et n deux entiers naturels non nuls.

démontrons que :

$$\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{1}{t^2}dt \leq S_{n+p} - S_n \leq \int_n^{n+p} \frac{1}{t^2}dt$$

On commence par préciser que $S_{n+p} - S_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2}$.
Pour conclure, il suffit donc de sommer l'inégalité obtenue à la question précédente qui donne :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}dt \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt$$

Par application de la relation de Chasles :

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \int_k^{k+1} \frac{1}{t^2}dt = \int_{n+1}^{n+p+1} \frac{1}{t^2}dt \text{ et } \sum_{k=n+1}^{n+p} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t^2}dt = \int_{n}^{n+p} \frac{1}{t^2}dt$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\int_{n+1}^{n+p+1} \frac{1}{t^2}dt \leq S_{n+p} - S_n \leq \int_{n}^{n+p} \frac{1}{t^2}dt}$

c) *Démontrons que :*

$$\frac{1}{n+1} \leq l - S_n \leq \frac{1}{n}$$

Un calcul rapide d'intégrale donne :

$$\int_n^{n+p} \frac{1}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\right]_n^{n+p} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} \text{ et } \int_{n+1}^{n+p+1} \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1}$$

On a donc d'après 3.b) :

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} \leq S_{n+p} - S_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p}$$

Dès lors, pour tout entier naturel, on fait tendre p vers l'infini dans l'inégalité précédente et on obtient :

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\frac{1}{n+1} \leq l - S_n \leq \frac{1}{n}}$

Multiplions de chaque côté de l'expression précédente par n : $\dfrac{n}{n+1} \leq n(l - S_n) \leq \dfrac{n}{n} = 1$.
On obtient alors par théorème d'encadrement des limites que :

$$\lim_{n\to\infty} n(l - S_n) = 1$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle l - S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

On nous demande enfin ce qu'on peut dire de $S_n + \dfrac{1}{n}$ pour n suffisamment grand. Attention au piège car il ne s'agit surtout pas d'utiliser l'équivalent précédent puisque toute addition est interdite.
Dès lors, on reprend la double inégalité du début de question pour encadrer S_n.
Soit :

$$l - \frac{1}{n} \leq S_n \leq l - \frac{1}{n+1}$$

et donc

$$l \leq S_n + \frac{1}{n} \leq l + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = l + \frac{1}{n(n+1)}$$

Par passage à la limite et application du théorème d'encadrement des limites, on obtient que $\underset{n\to\infty}{lim}\left(S_n + \frac{1}{n}\right) = l$
Et comme $l \neq 0$, on peut écrire :
Conclusion : $\boxed{S_n + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} l}$

④ On considère la fonction suivante :

```
def estimation(n):
   s = sommeP(n)
   s = sqrt(6*(s+1/n))
   return (s)
```

L'instruction `estimation(1000)` renvoie la valeur : 3.141593130895433.

Que peut-on conjecturer quant à la probable valeur de l ? La première ligne de la fonction `estimation()` affecte à `s` la valeur de S_n.
Or, d'après ce qui précède $s + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} l$ donc par multiplication par 6, $6(s + 1/n) \underset{n\to\infty}{\sim} 6l$.
La fonction $\sqrt{\ }$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut dire que $\underset{n\to\infty}{lim}\sqrt{6(s+1/n)} = \sqrt{6l}$.
La fonction `estimation()` étant appelée avec une valeur de n suffisamment grande ($n = 1000$), on peut estimer que

$$\sqrt{6l} \approx \pi$$

Conclusion : $\boxed{\text{On peut conjecturer que la probable valeur de } l \text{ est } \pi^2/6}$

2. Étude de la nature d'une série

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = (1+1)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$$

① *Donnons, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_1, u_2 et u_3 :*
Un calcul rapide donne $u_1 = 2$, $u_2 = u_1\frac{5}{4} = \frac{5}{2}$ et $u_3 = u_2\left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{5}{2}\frac{10}{9} = \frac{25}{9}$.

② a) *Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $u_n \geq 2$.*

— *initialisation :* $u_1 = 2 \geq 2$.
— On suppose que $u_n \geq 2$, pour n fixé ($n \geq 1$).
— Alors, sachant que $u_{n+1} = \prod_{k=1}^{n+1}\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = u_n\left(1 + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$,
on a immédiatement $u_{n+1} \geq 2$ puisqu'il est bien évident que $1 + \frac{1}{(n+1)^2} \geq 1$...

— ***Conclusion*** : $\boxed{u_n \geq 2, \forall n \geq 1}$

b) *Étudions la monotonie de la suite* (u_n) *:* On exploite à nouveau que :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 + \frac{1}{(n+1)^2} > 1$$

Tous les termes de la suite (u_n) étant positifs puisque $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $1 + \dfrac{1}{k^2} > 1$ et ln est bijective de $[1, +\infty[$ sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc conclure : $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$

③ a) *Montrons que, pour tout réel x strictement supérieur à -1, on a :* $\ln(1+x) \leq x$ *:*
Ce résultat peut se démontrer par application du théorème des accroissements finis. En effet :
La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur tout intervalle $[0, x] \subset]-1, +\infty[$. Dès lors :

$$\exists! c \in]0, x[/ \ln(1+x) = \frac{x}{1+c}$$

— Si $x > 0$, alors $0 < c < x \Rightarrow \dfrac{x}{1+c} < x$ et donc $\ln(1+x) < x$.

— Si $x < 0$, alors $x < c < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{1+c} > 1 \Rightarrow \dfrac{x}{1+c} < x$ et donc $\ln(1+x) < x$.

Conclusion : $\boxed{\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x}$ [en considérant le cas $x = 0$]

b) *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :* $\ln(u_n) \leq l$
Par définition de u_n et application de la fonction logarithme népérien, on obtient :

$$\ln(u_n) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

Par application de l'inégalité précédente, on en déduit :

$$\ln(u_n) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = S_n$$

avec $S_n \leq l$ puisque (S_n) est croissante (en effet $\sum \dfrac{1}{n^2}$ est une série à termes positifs...) et convergente et donc majorée par sa limite l en l'infini.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(u_n) \leq l}$

④ *Montrons que la suite (u_n) converge vers un réel l', élément de $[2, e^l]$:*
La suite (u_n) est croissante et de premier terme $u_1 = 2$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2$.
Par ailleurs, $\ln(u_n) \leq l$ donc, par passage à l'exponentielle qui est une fonction croissante : $u_n \leq e^l$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in [2, e^l]}$

Il découle de cet résultat que (u_n) est croissante et majorée par e^l. $\boxed{\text{Elle converge vers } l' \in [2, e^l]}$.

⑤ On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $l' - u_n$.

a) On justifie que la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en rappelant que $\ln(u_n) \leq l$ et que cette suite est croissante (en effet, $u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow \ln(u_n) \leq \ln(u_{n+1})$ puisque la fonction ln est croissante sur $[0, +\infty[$). Elle est donc croissante et majorée.
enfin $\underset{n\to\infty}{lim} \ln(u_n) = \ln(l')$ car la fonction ln est continue sur $[2, e^l] \subset]0, +\infty[$. Soit :

$$\boxed{\ln(l') = \underset{n\to\infty}{lim} \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)}$$

b) *Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :* $\ln\left(\frac{l'}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$

C'est immédiat :

$$\ln\left(\frac{l'}{u_n}\right) = \ln(l') - \ln(u_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) - \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

c) *Écrivons en Python une fonction* **`reste`** *qui prend en argument n et qui renvoie une bonne valeur approchée de :*

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$$

Il s'agit ici de calculer le reste de la série convergente $\sum_{k\geq 1} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

On peut se contenter de faire :

```
def reste(n):
    return np.sum([np.log(1+1/k**2) for k in range(n+1,10**6)])
```

d) Voici les résultats de quelques appels de cette fonction (supposée correctement écrite) :

```
> > > reste(9)
0.10497285546814518

> > > reste(49)
0.020198959583845037

> > > reste(99)
0.010048997486379833

> > > reste(199)
0.0050114998428795786

> > > reste(499)
0.0020009999955394315

> > > reste(999)
0.0009994999929165772
```

Que peut-on alors conjecturer comme équivalent en l'infini très simple de $\sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$ *?*

Et bien tout simplement que $\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$

e) En admettant le résultat obtenu en 5.d), on peut en déduire que $\underset{n\to\infty}{lim} nR_n = 1$.
Dès lors, d'après la définition de la limite,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0,\ nR_n \geq 0,9$$

D'où, pour tout $n \geq n_0$, on a bien :

$$\boxed{R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \geq \frac{0,9}{n}}$$

f) On rappelle que, grâce à la question 5.b), on a : $R_n = \ln\left(\frac{l'}{u_n}\right)$.

On peut donc dire que $\ln\left(\frac{l'}{u_n}\right) \geq \frac{0,9}{n}$, $\forall n \geq n_0$.

Par application de la fonction exponentielle qui est croissante, on a :

$$\frac{l'}{u_n} \geq e^{0,9/n} \Leftrightarrow l' \geq u_n e^{0,9/n} \text{ car } u_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq n_0,\ l' - u_n \geq u_n(e^{0,9/n} - 1)}$

g) On admet que pour tout réel x, on a : $e^x - 1 \geq x$ (ce qui se démontrer également grâce au théorème des accroissements finis...).

On applique l'indication ci-dessus pour dire que : $e^{0.9/n} - 1 \geq \frac{0,9}{n}$.

Dès lors, d'après f)

$$l' - u_n \geq u_n \cdot \frac{0,9}{n} \geq \frac{1,8}{n} \text{ puisqu'on rappelle que } u_n \geq 2,\ \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq n_0,\ l' - u_n \geq \frac{1,8}{n}}$

Concluons quant à la nature de la série de terme général $l' - u_n$:

Nous savons que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge donc la série $\sum \frac{1,8}{n}$ diverge.

Par application du théorème de convergence par comparaison des séries à termes positifs, on a :

Conclusion : $\boxed{\text{La série } \sum (l' - u_n) \text{ diverge}}$

Problème 2 :

Les estimations et statistiques concernant la population des Etats-Unis de 1790 à 1950 donnent les chiffres suivants (exprimés en millions d'individus) :

dates t_i	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850	1860	1870
population y_i	3.929	5.308	7.240	9.638	12.866	17.069	23.192	31.443	38.558
dates t_i	1880	1890	1900	1910	1920	1930	1940	1950	
population y_i	50.156	62.498	75.995	91.972	105.711	122.775	131.669	150.697	

Nous noterons dans la suite $n = 17$.

Préambule : On supposera que la commande `import numpy as np` a été exécutée mais toutes les fonctions Python demandées dans ce problème devront être rédigées **sans utiliser** les fonctions suivantes : `np.sum()`, `np.mean()`, `np.std()`, `np.cov()`, `np.polyfit()`

① *Initialisons en langage Python un tableau* `P` *à deux entrées, la première ligne contenant les dates, la seconde contenant le nombre d'habitants :*
On commencera par initialiser le tableau :
`P = np.zeros((2,17))`
Puis on créé la première ligne grâce, par exemple à la fonction `arange` de la bibliothèque `numpy` :
`P[0] = np.arange(1790,1960,10)`
Pour la seconde ligne, on n'a pas le choix, il faut rentrer les valeurs à la main :
`P[1] = np.array([3.929,5.308,7.240,9.638,12.866,17.069,23.192,...])`

② *Écrivons une fonction* `moyenne(P,i)` *qui prend en argument d'entrée un tableau* `P` *de deux lignes tel que celui défini précédemment ainsi qu'un entier* `i` *à valeur dans* $\{0,1\}$ *et qui retourne la moyenne des valeurs de la ligne* i *de* P *(à titre d'exemple* `moyenne(P,1)` *retourne la taille moyenne de la population entre* 1790 *et* 1950*).*

On rappelle que la moyenne d'une série $T = \{t_1, \cdots, t_n\}$ vaut $\overline{t} = \frac{\sum_{k=1}^{n} t_k}{n}$.
Il suffit donc de mettre en place une boucle « Pour » pour calculer le numérateur qu'on initialise à $S = 0$.

```
def moyenne(P,i):
    T = P[i,:]
    n = len(T)
    S = 0
    for k in range(n):
       S += T[k] # ou S += P[i,k]
    return S/n
```

Partie I :

Nous supposons que cette population a suivi sur ces décennies une loi logistique, c'est-à-dire que pour tout temps t compris entre 1790 et 1950, la valeur théorique $y(t)$ (exprimée elle aussi en millions d'individus) du nombre d'habitant des USA à l'instant t et donné par la formule :

$$y(t) = \frac{K}{1 + Cexp(-rt)}, \forall t \in [1790, 1950]$$

où K, C, et r sont des constantes réelles strictement positives. Le but de ce problème est de déterminer ces constantes à l'aide des seules données expérimentales ci-dessus.

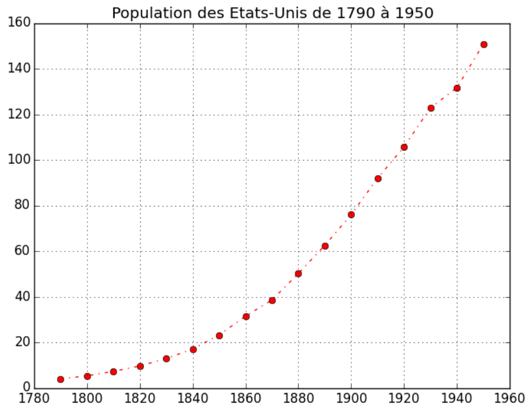
① *Montrons, en justifiant les différentes étapes, que :*

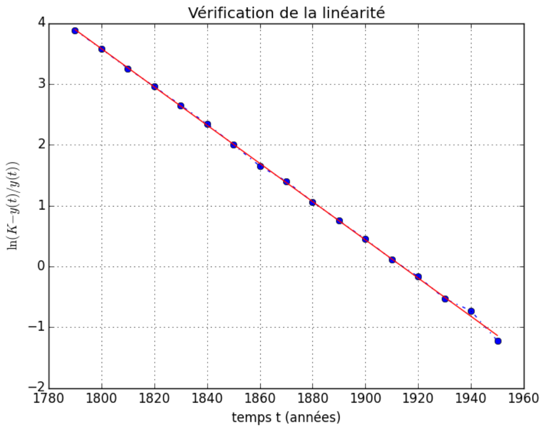
$$\forall t \in [1790, 1950], \ -rt + \ln(C) = \ln\left(\frac{K - y(t)}{y(t)}\right)$$

On raisonne par équivalences :

$$y(t) = \frac{k}{1 + Cexp(-rt)} \Leftrightarrow y(t) + Cy(t)e^{-rt} = K$$
$$\Leftrightarrow K - y(t) = Cy(t)e^{-rt} \Leftrightarrow \frac{K - y(t)}{y(t)} = Ce^{-rt}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{K - y(t)}{y(t)}\right) = \ln(C) - rt$$

Étant entendu que $0 < y(t) < K$, $\forall t \in [1790, 1750]$ et donc que le logarithme est bien défini.





Dans la suite, nous noterons $\begin{cases} \alpha & = -r \\ \beta & = \ln(C) \end{cases}$

② Dans cette partie, nous supposons connue la population limite K. Il s'agit donc de déterminer les constantes α et β et pour cela nous utilisons la méthode des moindres carrés dont le principe est rappelé : L'objectif est de déterminer les valeurs de α et β telles que les écarts entre les valeurs mesurées $z_i = \ln\left(\frac{K - y_i}{y_i}\right)$ et les valeurs théoriques $\ln\left(\frac{K - y(t)}{y(t)}\right)$ aux mêmes instants t_i ($i \in [\![0, n-1]\!]$) soient les plus petits possibles.
Il s'agit donc de déterminer les valeurs de α et β telles que la quantité :

$$E(\alpha, \beta) = \sum_{i=0}^{n-1} (\alpha t_i + \beta - z_i)^2$$

soit la plus petite possible.

a) *Justifions que E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$:*
Il suffit de remarquer que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$P(\alpha, \beta) = (\alpha t_i + \beta - z_i)^2 \text{ est un polynôme de degré au plus 2 en } \alpha \text{ et } \beta$$

Tout polynôme étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, E est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ comme somme de n polynôme de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Condition nécessaire sur $\dfrac{\partial E}{\partial \alpha}$ *et* $\dfrac{\partial E}{\partial \beta}$ *pour que* E *admette un minimum en* (α, β) *:*

C'est du cours. Si E admet un extremum en (α, β), alors $\begin{cases} \dfrac{\partial E}{\partial \alpha} & = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial \beta} & = 0 \end{cases} \quad (S)$.

b) *Montrons qu'on retrouve ainsi les coefficients de la droite de régression du nuage de points* $\{(t_i, z_i), i \in [\![0, n-1]\!]\}$ *:*

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2t_i(\alpha t_i + \beta - z_i) & = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} 2(\alpha t_i + \beta - z_i) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\alpha t_i^2 + \beta t_i - t_i z_i\right) & = 0 \quad (L_1) \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (\alpha t_i + \beta - z_i) & = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_i^2 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} t_i - \sum_{k=0}^{n-1} t_i z_i & = 0 \\ \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_i + \beta \sum_{k=0}^{n-1} 1 - \sum_{k=0}^{n-1} z_i & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_i^2 + \beta \sum_{k=0}^{n-1} t_i - \sum_{k=0}^{n-1} t_i z_i & = 0 \quad (L_1) \\ \alpha \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} t_i + n\beta - \sum_{k=0}^{n-1} z_i & = 0 \quad (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = \overline{z} - \alpha \overline{t} \quad (L_2) \\ \alpha \cdot \overline{t^2} + \beta \cdot \overline{t} - \overline{t \cdot z} & = 0 \quad (L_1)/n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = \overline{z} - \alpha \overline{t} \\ \alpha \cdot \overline{t^2} + \overline{z} \cdot \overline{t} - \alpha (\overline{t})^2 - \overline{t \cdot z} & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta & = \overline{z} - \alpha \overline{t} \\ \alpha & = \dfrac{\overline{t \cdot z} - \overline{z}\overline{t}}{\overline{t^2} - (\overline{t})^2} = \dfrac{s_{tz}}{s_t^2} \end{cases}$$

L'unique solution (α^*, β^*) est bien égale au couple des coefficients de la droite de régression du nuage de points $\{(t_i, z_i), i \in [\![0, n-1]\!]\}$

c) *Écrivons une fonction* `coeffRegression(P)` *qui prend en entrée le tableau* P*, utilise* `moyenne()` *du préambule et retourne les valeurs* α^* *et* β^* *qui minimisent* E *:*

Il suffit de transcrire littéralement les formules obtenues pour α^* et β^* :

```
def coeffregression(P):
    T = P[0]
    Z = np.log((K-P[1])/P[1])
    moyZ,moyT = moyenne(Z),moyenne(T)
    moyT2 = moyenne(T**2)
    moyTZ = moyenne(T*Z)
    al = (moyTZ-moyT*moyZ)/(moyT2-moyT**2)
    beta = moyZ-al*moyT
    return al,beta
```

d) *En supposant que* $K = 195$*, un appel à cette fonction retourne avec Python* `alphaEtoile,betaEtoile= coeffRegression(P)` *avec* `alphaEtoile`$= -0.0314$ *et* `betaEtoile`$=$

60.179.
On en déduit immédiatement les valeurs de r et de C en rappelant que $\alpha = -r$ et $\beta = \ln(C)$.
Conclusion : $\boxed{r = -\alpha = 0.031 \text{ et } C = e^{\beta} = 1.366\ 10^{26}}$

Partie II :

α^* et β^* étant les valeurs qui minimisent la quantité $E(\alpha, \beta)$ définie en I/2., on note désormais $Err(L) = E(\alpha^*, \beta^*)$.
C'est une évaluation de l'erreur globale faite en fonction de la population limite L.

① *Écrivons une fonction Python* ***`Err(P,L)`*** *qui prend en argument d'entrée le tableau P et la population limite L et retourne $Err(L)$:*
Il suffit de déterminer les coefficients α^* et β^* grâce à la fonction `coeffregression(P)` écrite en I.2.a) et calculer la somme des écarts aux données démographiques au carré.

Une écriture possible est :

```
def Err(P,l):
    T = P[0]
    Z = np.log((l-P[1])/P[1])
    al,bet = coeffregression(P)
    S = 0
    for k in range(len(T)):
       S += (al*T[k]+bet-Z[k])**2
    return S
```

② Malheureusement nous ignorons la valeur de la population limite K. Nous savons seulement, sur la base des dernières valeurs, qu'elle est supérieure à 150.697 millions d'habitants. L'idée pour la déterminer consiste à minimiser l'erreur globale faite en fonction de K que nous avons notée $Err(K)$.
Pour cela nous partons d'une valeur arbitraire de K_0 ($K_0 = 160$ est une valeur plausible) et nous calculons successivement $K_j = K_0 + \dfrac{j}{10}$ et $Err(K_j)$, $j \in \mathbb{N}$.
Nous stopperons les itérations dès que :

$$Err(K_j) < Err(K_{j+1})$$

Nous estimons alors que la population limite K est comprise entre K_j et K_{j+1}.

a) *Le critère d'arrêt suffit-il à justifier que le minimum de la fonction* ***`Err`*** *est compris entre K_j et K_{j+1} ?* Non, qu'est-ce qui assure que la fonction Err sera croissante à partir de K ? par ailleurs, même dans ce cas, il est possible que K soit compris entre K_{j-1} et K_j.

b) *Écrivons un algorithme qui détermine la plus petite valeur de j telle que $Err(K_j) < Err(K_{j+1})$ et renvoie K_j :*

```
def estimeK(P):
    K0 = 160
```

```
e0 = Err(P,K0)
j = 1
while Err(P,K0+j/10) < e0:
   e0 = Err(P,K0+j/10)
   j += 1
return K0+(j-1)/10
```

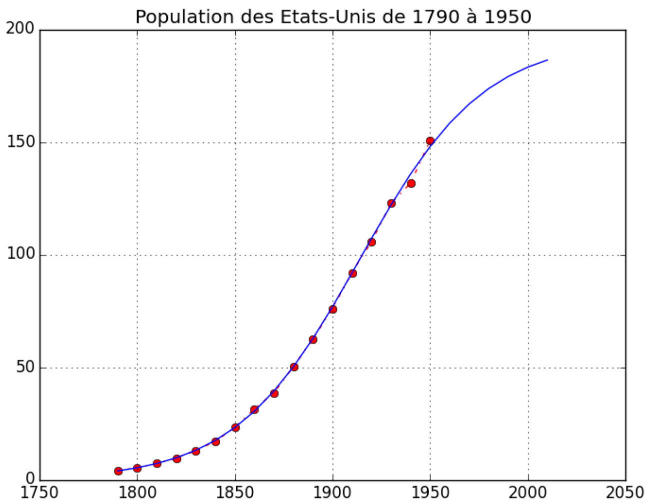
L'appel à cette fonction retourne $\boxed{K = 195.4 \text{ millions d'habitants}}$.

c) Le graphe qui est fourni permettait d'estimer sans Python la valeur de K qu'on arrondira à 195 millions d'habitants, valeur assez proche de celle obtenue à la question précédente mais surtout conforme à celle que suggérait l'énoncé à la question I.2.a)iv et pour laquelle on avait $\alpha = -0.031$ et $\beta = 60.179$.

Sous cette hypothèse, l'effectif attendu pour la population des USA en 2016 est, au regard de l'équation logistique avec $K = 195$, $r = 0.031$ et $C = 1.366\ 10^{26}$ de :

$$y(2016) = \frac{195}{1 + 1.366e26 * exp(-0.031 * 2016)} = 177.5 \text{ millions d'habitants}$$

L'adéquation avec les effectifs entre 1790 et 1950 semblent d'ailleurs très bonnes comme le suggère le tracé de l'équation logistique ci-dessous :



Le fait que la population américaine compte à ce jour plus de 324 millions d'habitants suggère juste de nous méfier des modèles, aussi rigoureux et convaincants soient-ils sur l'ensemble des années sur lesquelles il a été calibré. Il ne pouvait anticiper le formidable essor migratoire dont ont bénéficier les américains à partir des années 1950 !

- FIN -