

## Remarque

Classement des exercices

Une  $\star$  signale une application directe des formules du cours ;

Les exercices marqués d'un  $\heartsuit$  indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les  $\star\star$  à  $\star\star\star$  désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.



**Les objectifs :** Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien ( $\ln$ ), fonctions exponentielle  $x \mapsto a^x$  où  $a \in \mathbb{R}_+^*$ , fonction logarithme décimal ( $\log$ ), fonctions puissances  $x \mapsto x^\alpha$  avec  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ , fonctions circulaires, partie entière ( $[\cdot]$ ) et valeur absolue ( $|\cdot|$ ).

Calculs de dérivées et de primitives en vue d'applications à la physique et aux équations différentielles.

Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions  $\sqrt[n]{\cdot}$  et  $\arctan$ ). Résolution approchée d'une équation du type  $f(x) = 0$ .

Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.

Développements limités (développements usuels :  $\exp$ ,  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $x \mapsto 1/(1+x)$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ). Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Exercice 1  $\star$  : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

$$\begin{array}{llll}
 a) \lim_{x \rightarrow 0} (\ln(\sin x) - \ln x); & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{e^{1/x} + 1}; & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}; & d) \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} \right] \\
 e) \lim_{x \rightarrow 0} \left( x \cdot \left[ \frac{1}{x} \right] \right); & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}; & g) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}}; & h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \\
 i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(ax) - \cos(a)}{e^{-ax^2} - e^{-a}} (a > 0); & j) \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin^2 x - \sin^2 a}{x^2 - a^2}; & & \\
 k) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}; & l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^x - 1}{x}; & m) \lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{1/x} - x); & n) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sqrt{1 + \sin x}} - e}{\tan x}
 \end{array}$$

Exercice 2  $\star$  : Continuité

Soit  $f$  une application continue et positive sur  $\mathbb{R}_+$ . On suppose que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l$  ( $l < 1$ );

Montrer que  $f$  admet un point fixe (Remarque : On pourra faire intervenir la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$ ).

Exercice 3  $\star$  : Fonctions usuelles

$$\textcircled{1} \text{ Résoudre } \begin{cases} 2 \log_x y + 2 \log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$$

$\textcircled{2}$  Ensemble de définition, parité et tableau de variation de  $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ ;  
Montrer que la droite d'équation ( $x = -1$ ) est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}_f$

- ③ Calculer  $S = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$   
 En déduire  $T = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

### Exercice 4 ★ : Dérivabilité des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ; \quad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} ; \quad h : x \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

### Exercice 5 ★★ : Dérivées de fonctions réciproques

- ① Montrer que la fonction sinus est une bijection de  $I = [-\pi/2, \pi/2]$  sur  $[-1, 1]$ . On note  $A$  la réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle  $I$ .
- ② Déterminer  $A(1/2)$  et  $A(-\sqrt{2}/2)$ .
- ③ Tracer le graphe de la fonction  $A$  dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- ④ Soit  $x \in [-1, 1]$ . Montrer que  $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$ .
- ⑤ Montrer que la fonction  $A$  est dérivable sur  $] -1, 1[$  et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.
- ⑥ a. Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction  $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$   
 b. Montrer que la fonction  $A$  admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

### Exercice 6 ★★ : Dérivées de fonctions réciproques

On considère deux fonctions  $ch$  et  $sh$  définies respectivement par :

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

- ① Calculer  $ch^2(x) - sh^2(x)$
- ② Etudier la fonction  $ch$  sur l'intervalle  $[0, +\infty[$  et en déduire sa bijectivité sur un intervalle qu'on précisera.
- ③ Expliciter sa réciproque appelée  $Argch$  et donner sa dérivée par deux méthodes différentes.

### Exercice 7 ♥ : Th. de Rolle et F. des Accroissements finis

- ① Montrer les inégalités suivantes :

- a.  $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x$   
 b.  $\forall x \in [0, \pi/2], \sin x \leq x$   
 c.  $\forall x \in [0, +\infty[, \frac{x}{1+x^2} \leq \text{Arctan} x \leq x$

- ② Soit  $f$  une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  telle que  $f'(x) \leq -3$ . Montrer que :

$$\exists ! y \in \mathbb{R} / f(y) = 2y$$

- ③ Application de la formule des accroissements finis à l'étude des suites récurrentes :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 \in \mathbb{R}$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$

- a. Démontrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_n \in [0, 1]$ .
- b. Montrer qu'il existe un unique réel  $\lambda$  tel que :  $\frac{e^\lambda}{e^\lambda + 1} = \lambda$ . Démontrer que  $\lambda \in ]0, 1[$ .
- c. Prouver que :  $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \lambda| \leq \frac{1}{4}|u_n - \lambda|$
- d. Démontrer que la suite  $(u_n)$  converge et calculer sa limite. En donner une valeur approchée grâce à Python.

### Exercice 8 : ★ ★

On considère la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^3}{9} + \frac{x}{3} + \frac{1}{9}$  et la suite récurrente  $(x_n)_{n \geq 0}$  définie par :

$$f(x_n) = x_{n+1}, x_0 \in ]0, 1[$$

- ① Montrer que  $f(x) = x$  admet une unique solution  $c$  sur l'intervalle  $]0, 1/2[$ .
- ② Étudier la monotonie de la suite  $(x_n)$ .
- ③ Étudier la convergence de la suite  $(x_n)$  et écrire une fonction Python permettant le calcul de  $x_n$  pour toute valeur entière de  $n$  entrée par l'utilisateur.
- ④ Donner une valeur approchée à  $\varepsilon$  près de la limite de  $(x_n)$  en utilisant l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous :

#### Algorithme de dichotomie

On considère une fonction  $f$  continue sur un segment  $[a, b]$ .

On suppose que  $f$  s'annule exactement une fois sur  $[a, b]$  en un point que l'on note  $\alpha$

On définit les suites  $(a_k)_{k \geq 0}$  et  $(b_k)_{k \geq 0}$  de la façon suivante :

–  $a_0 = a$  et  $b_0 = b$

– Pour tout entier naturel  $k$  on note  $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$ .  
 si  $f(a_k)f(c_k) \leq 0$ , alors  $a_{k+1} = a_k$  et  $b_{k+1} = c_k$   
 sinon  $a_{k+1} = c_k$  et  $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites  $(a_k)$  et  $(b_k)$  convergent toutes les deux vers  $\alpha$  en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, b_k - a_k = \frac{b - a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier  $k$  est tel que  $\frac{b - a}{2^k} \leq \varepsilon$ , alors  $a_k$  et  $b_k$  sont des valeurs approchées à  $\varepsilon$  près de  $\alpha$ .

### Exercice 9 ★ : Développement limités

Déterminer les développements limités suivants :

- 1)  $\frac{1}{\sqrt{3-x}}$  à l'ordre 2 en 0;      2)  $\ln\left(\frac{1}{\cos x}\right)$  à l'ordre 4 en 0;
- 3)  $(\ln(1+x))^2$  à l'ordre 4 en 0;      4)  $\sqrt{x}$  à l'ordre 3 en 2;      5)  $\text{Arctan}(x)$  à l'ordre 5 en 0;
- 6)  $\frac{1}{1+e^x}$  à l'ordre 3 en 0;      7)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  à l'ordre  $n$  en 0

### Exercice 10 ♥ : Développement limités

Soit  $f$  définie par  $f(x) = \text{Arctan}(\ln(1+x))$ .

- ① Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1; +\infty[$  et montrer qu'elle est bijective de  $] - 1; +\infty[$  sur un intervalle à préciser.
- ② Donner un  $DL_3(0)$  de  $f$ . En déduire un  $DL_3(0)$  de  $f^{-1}$ .

---

### Exercice 11 \*\* : Application des développements limités

- ① Soit  $f$ , fonction définie sur  $[0, \pi/4]$  par :  $f(x) = (1 - 2\sin x) \cdot \tan(3x)$ .  
Déterminer son ensemble de définition et déterminer sa continuité et sa dérivabilité sur cet ensemble.
- ② Soit la fonction  $f$  définies par :  $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$ .  
Déterminer son ensemble de définition et étudier les branches infinies de  $f$  en précisant les positions de la courbe par rapport à ses asymptotes.
- ③ Mêmes questions pour  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$ .