1 T.D.1 Suites numériques

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ; Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.

⚠ *Les objectifs* : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme.
Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.
Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Croissances comparées : $a^n = \circ(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = \circ(a^n)$ (avec $\alpha > 0$) ; Suites équivalentes.

Exercice 1 ✶ : Quelques suites usuelles

Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par $u_0 = v_0 = 2$ et indiquer leur nature.
Écrire dans un second temps et pour chaque cas une fonction Python permettant de représenter graphiquement leurs n premiers termes (n étant proposé par l'utilisateur).

① $u_{n+1} = u_n + 3$; $v_{n+1} = v_n - 5$

② $u_{n+1} = 3u_n$; $v_{n+1} = v_n/2$

③ $u_{n+1} = 3u_n + 3$; $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{2}$

Exercice 2 ✶ : Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Même questions pour les suites (u_n) définies par récurrences par :

① $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.

② $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_1 = 1$, $u_2 = 3$

③ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$

Exercice 3 ✶ : Croissances comparées et suites équivalentes

Déterminer le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :[1]

$$a)u_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 2}; \qquad b)u_n = \frac{(-1)^n n^2 + 2n - 1}{n^2 - n + 2}; \qquad c)u_n = n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right);$$

$$d)u_n = \ln(2 - e^{1/n}); \qquad e)u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n; \qquad f)u_n = \frac{n^2 + cos(n)}{2^n + nsin(n)};$$

$$g)u_n = \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}; \qquad h)u_n = \sqrt{n}\sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right); \qquad i)u_n = n\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

1. On montrera au préalable pour g) que : si $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$, alors $1 - \cos(u_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{u_n^2}{2}$

Exercice 4 ✶ :

Montrer qu'une suite arithmétique est caractérisée par la propriété suivante : « Chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit ».

Exercice 5 ✶ :

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies respectivement par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

① Montrer que ces suites sont adjacentes et qu'elles convergent. On admettra qu'elles ont pour limite commune e.

② Écrire une fonction qui, sans utilisation de fonctions Python prédéfinies, calcule les termes u_n et v_n jusqu'à ce que $|u_n - v_n| = v_n - u_n < 10^{-6}$ et retourne $\dfrac{u_n + v_n}{2}$.

Exercice 6 ❤ :

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

② Conclure que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera par la suite S sa limite.

③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1}dt$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S = ln(2)$

④ En distinguant selon la parité de n, montrer que $|S - S_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ✶✶ :

Soit f fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.

① Étudier f et donner sont allure dans un repère sur lequel on aura pris soin de tracer la droite d'équation $(y = x)$.
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

② Utiliser le graphe de f pour montrer la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

③ Retrouver ce résultat en étudiant la monotonie de la suite (u_n) sans l'aide de la fonction f.

④ Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n^2$ puis que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 : ✶✶

Étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\text{a)} \begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \end{cases} ; \quad \text{b)} \begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \sqrt{1+u_n} \end{cases} ; \quad \text{c)} \begin{cases} u_0 &\in [1/3, +\infty[\\ u_{n+1} &= \sqrt{u_n - \dfrac{2}{9}} \end{cases}$$

Exercice 9 : ✶✶✶

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

② **Modélisation :** A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.
Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

③ **Étude mathématique :**

a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
En déduire la monotonie de la suite (α_n).

b. Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l.
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n).