Devoir : Révisions d'analyse et de statistiques

Exercice :

① a) *Étudions la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_{n+1} = \sin(u_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et $u_0 \in]0, \pi/2[$:* Il s'agit d'une suite récurrente définie par la fonction $f : t \longmapsto \sin(t)$ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = [0, \pi/2]$.
Les propriétés de la fonction sin sont bien connues : Elle est strictement croissante sur I et $f(I) = [0, 1] \subset I$.

i. On montre par récurrence que $u_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$: En effet, $u_0 \in I$ et si $u_n \in I$ pour n fixé ($n \geq 0$) alors $u_{n+1} = \sin(u_n) \in I$ puisque $f(I) \subset I$.

ii. La fonction sin est croissante sur I donc la suite (u_n) est monotone. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - u_{n+1} = f(u_{n+1}) - f(u_n)$ est du même signe que $u_{n+1} - u_n$ et donc, par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n$ est du même signe que $u_1 - u_0$.
Conclusion : $\boxed{(u_n)_{n\geq 0} \text{ est monotone et bornée. Elle converge.}}$

iii. Soit $l = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$, alors $l = \sin(l)$ car sin est une fonction continue sur I.
Or $\sin(l) = l \Leftrightarrow l = 0$. ***Conclusion*** : $\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ converge vers } l = 0}$

b) Écrire une fonction `suiteU(a,n)` de paramètres d'entrée le premier terme $u_0 = a$ et un entier naturel n et qui retourne la liste $[u_0, u_1, ..., u_{n-1}]$ des n premiers termes de la suite.
Analyse : On nomme `Lu` la liste des n premiers termes de la suite qu'on initialise avec le premier terme $u_0 = a$, soit `Lu = [a]`. On calcule ensuite les $n - 1$ termes u_1 à u_{n-1}. On fait pour ça une boucle « Pour » sur k en faisant varier k de 1 à $n - 1$ grâce à `range(1,n)`.

Une écriture possible est la suivante :

```
def suiteU(a,n):
    Lu = [a]
    for k in range(1,n):
        b = sin(a)
        Lu.append(b)
        a = b
    return Lu
```

② Soit la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) *Donnons le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0 :* On utilise le développement limité au voisinage de 0 de $\ln(1+u)$ qui, rappelons-le, est :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)$$

Dès lors :

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \circ(x^2)$$

D'où $\boxed{f(x) = 1 - 2x + \circ(x)}$

b) *La fonction f est-elle continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$? dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$?*

On commence par dire qu'elle est continue et dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[\subset 0$ comme produit et somme de

fonctions continues et dérivables sur cet intervalle ($x \longmapsto \dfrac{1}{x}$, $x \longmapsto \ln(1+2x)$ et $x \longmapsto -1$).
Par ailleurs, f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0. On peut donc conclure qu'elle est **continue** et **dérivable** en 0.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur }]-\dfrac{1}{2}, +\infty[}$

Calculons sa dérivée en tout x pour lequel cela a un sens :
Pour $x = 0$, le développement limité au voisinage de 0 donne immédiatement : $f'(0) = -2$.
Et pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2x+1} - \ln(1+2x)}{x^2}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} & \end{cases}}$

c) Montrer que f est strictement monotone et tracer son tableau de variation.
Le signe de f' est celui de son numérateur $h(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$.
$\forall x \neq 0$, $h'(x) = -2\ln(1+2x)$.
On en déduit que $h'(x) > 0$ sur $]-1/2, 0[$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.
Dès lors, h est croissantes ur $]-1/2, 0[$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Et comme $h(0) = 0$, on peut conclure que h est strictement négative (sauf en $x = 0$).

Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante}}$

Problème : Agro-Véto B 2018

1.1. Étude du modèle

Pour étudier cette équation, on définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction de Michaelis-Menten, notée f, par :

$$f(x) = \frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

① *Montrons que la fonction f est croissante et déterminer ses limites aux bords du domaine de définition :*
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas (en effet K_M est supposé strictement positif). On obtient :

$$f'(s) = \frac{v_{max}(K_M + s) - v_{max}s}{(K_M + s)^2} = \frac{K_M v_{max}}{(K_M + s)^2} > 0,\ \forall s \in \mathbb{R}_+$$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+}$

Quant aux limites aux bornes :

$$\boxed{f(0) = 0} \text{ et } f(s) \underset{s\to\infty}{\sim} \frac{v_{max}s}{s} = v_{max} \text{ donc } \boxed{\lim_{s\to+\infty} f(s) = v_{max}}$$

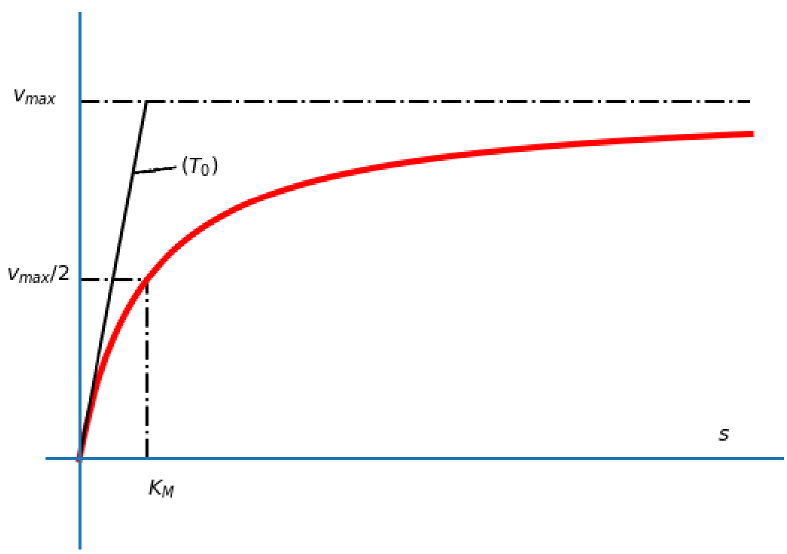
② *Pour quelle valeur de s a-t-on $f(x) = \dfrac{v_{max}}{2}$?* Il suffit de résoudre l'équation :

$$\forall s \in \mathbb{R}_+,\ f(s) = \frac{v_{max}}{2} \Leftrightarrow \frac{v_{max}s}{K_M + s} = \frac{v_{max}}{2} \Leftrightarrow \frac{s}{K_M + s} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow s = \frac{K_M}{2} + \frac{s}{2} \Leftrightarrow s = K_M$$

Conclusion : $\boxed{f(K_M) = \dfrac{v_{max}}{2}}$

③ *Traçons la courbe représentative de f en y faisant figurer des informations pertinentes :*
On choisit de représenter les informations suivantes :

— L'asymptote horizontale d'équation $(y = v_{max})$.
— Le point $\left(K_M, \frac{v_{max}}{2}\right)$.
— La tangente en 0 d'équation $y = f'(0)s + f(0) = \frac{v_{max}}{K_M}s$ qui coupe l'asymptote au point d'abscisse K_M.



1.2. Identification expérimentale des paramètres

Dans la suite, la quantité $\dfrac{dp}{dt}(t)$ est notée $v(t)$. On note par ailleurs v_i la vitesse initiale et on obtient :

$$v_i = \frac{v_{max} s_0}{K_M + s_0}$$

① *Établissons une relation de la forme $v_i^{-1} = \alpha s_0^{-1} + \beta$ où les constantes α et β sont à déterminer :*
En inversant la relation (après avoir noté que v_i n'est jamais nul), on obtient :

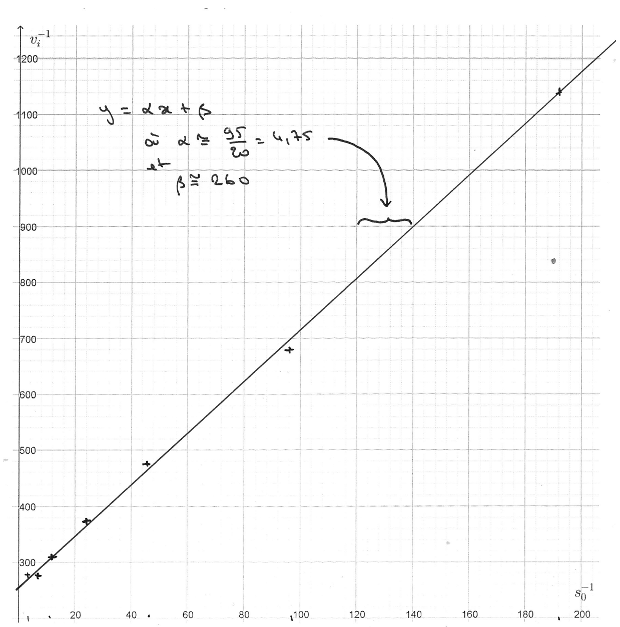
$$\frac{1}{v_i} = \frac{K_M + s_0}{v_{max} s_0} = \frac{K_M}{v_{max}} \cdot \frac{1}{s_0} + \frac{1}{v_{max}}$$

Conclusion : $\boxed{v_i^{-1} = \alpha s_0^{-1} + \beta, \text{ avec } \alpha = \dfrac{K_M}{v_{max}} \text{ et } \beta = \dfrac{1}{v_{max}}}$

② *Expliquons comment on peut déterminer graphiquement les paramètres K_M et v_{max} à partir des données expérimentales :*
On réalise plusieurs expériences permettant de mesurer v_i et s_0.
On place les points (s_0^{-1}, v_i^{-1}) dans le plan. Si le modèle est valide, aux erreurs de mesures près, ces points sont alignés sur une droite d'équation $y = \alpha x + \beta$. La détermination graphique de α et β permet de déterminer : $v_{max} = \dfrac{1}{\beta}$ et $K_M = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

On se propose d'appliquer l'approche précédente sur des résultats expérimentaux de Michaelis et Menten concernant l'hydrolyse de saccharose sous l'action d'une enzyme, l'invertase. Le tableau suivant donne les vitesses initiales en fonction des concentrations initiales en saccharose pour 7 expérimentations, ainsi que leurs inverses arrondis à l'unité.

③ *Reportons sur le graphique de l'annexe 1 les couples (s_0^{-1}, v_i^{-1}) :*



④ *Proposons des valeurs approchées de K_M et v_{max} avec une précision en accord avec l'approche utilisée :*
L'impression du papier millimétré n'est pas d'excellente qualité... on estime donc

$$\alpha = 4.75 \text{ et } \beta = 260$$

Dès lors, $\boxed{v_{max} = \dfrac{1}{260} = 3,84 \cdot 10^{-3} mol.L^{-1}.min^{-1}) \text{ et } K_M = \dfrac{4,75}{260} = 0,018 mol.L^{-1}}$

1.3. Étude informatique de données expérimentales

① a) *Écrivons une fonction* `inv` *qui prend en entrée une liste de nombres (supposés non nuls)* `L` *et qui renvoie la liste composée des inverses de ces nombres :*
Une écriture possible est :

```
def inv(L):
   return [1/k for k in L]
```

b) *Écrivons une version améliorée* `inv_ex` *de la fonction* `inv` *qui prend en entrée une liste de nombres* `L`*, puis : si un de ces nombres est nul, alors elle renvoie le booléen* `False`*, sinon elle renvoie la liste composée des inverses de ces nombres.*

```
def inv_ex(L):
    Linv = []
    for k in L:
       if k == 0:
          return False
       else:
          Linv.append(1/k)
    return Linv
```

c) *Complétons les lignes de codes suivantes afin qu'elles effectuent le tracé demandé en question 3 de la partie 1.2 (les points seront représentés par des petits cercles et ne seront pas reliés entre eux) :*
On rappelle que les données dont il s'agit de calculer les inverses sont disponibles dans les listes `La` et `Lv`.
Il suffit donc d'écrire :

```
plt.plot(inv(Ls),inv(Lv),"o")
plt.show()
```

② Écriture de fonctions préliminaires.

a) *Écrivons une fonction* `moyenne` *qui prend en entrée une liste* `X` *(non vide) de nombres réels et qui renvoie la moyenne des éléments de la liste :*
Si les éléments de la liste X sont $x_1, x_2, \cdots, x_n$, alors $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.
Pour calculer la moyenne, il suffit donc de calculer la somme S des x_k puis diviser par `len(X)`.

```
def moyenne(X):
   s = 0
   for k in range(len(X)):
      s += X[k]
   return s/len(X)
```

ou

```
def moyenne(X):
   s = 0
   for x in X:
      s += x
   return s/len(X)
```

b) *Écrivons une fonction* `variance` *qui prend en entrée une liste* `X` *(non vide) de nombres réels et qui renvoie la variance des éléments de la liste.*
On rappelle la formule de la variance : $s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \overline{x}^2$.
Il suffit, pour calculer la variance, de calculer la moyenne des termes de la liste au carré auxquels on soustraira le carré de la moyenne calculé précedemment.
Ce qui donne :

```
def variance(X):
   s = 0
   for k in range(len(X)):
      s += X[k]**2
   return s/len(X)-moyenne(X)**2
```

ou

```
def variance(X):
   s = 0
   for x in X:
      s += x**2
   return s/len(X)-moyenne(X)**2
```

③ a) *Complétons le programme suivant afin qu'il renvoie la valeur de la covariance de* `X` *et* `Y` *si elle existe et le booléen* `False` *sinon :*

On connaît au moins deux formules pour calculer la covariance, mais au regard des deux dernières lignes du programme, sachant qu'il nous faut retourner `1/nx*S`, la seule formule possible est :

$$s_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - \overline{x})(y_k - \overline{y})$$

✐ On acceptera aussi en le justifiant que :

$$s_{x,y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k y_k - \overline{x}\cdot\overline{y}\right)$$

```
def cov(X,Y):
   " " " Entree : X,Y (liste). " " "
   nx = len(X) ; ny = len(Y)
   if nx != ny or nx == 0:
      return(False)
   else:
      S = 0
      for k in range(nx):
         S = S+(X[k]-moyenne(X))*(Y[k]-moyenne(Y))
      y = 1/nx*S
      return(y)
```

b) *Parmi les quatre valeurs suivantes, lesquelles ne peuvent pas être renvoyées par la fonction* `cov` *? :*

i. `True`
ii. `[1,2]`
iii. `"False"`
iv. `-0.5`

Ce ne peut être 'i' car la fonction `cov` ne retourne jamais `True`.
Ce ne peut être pas 'ii' car `cov` retourne un réel et non une liste et pas davantage 'iii' car ce n'est pas une chaîne de caractère comme `"False"` qui sera retournée en cas d'impossibilité de calcul.
Conclusion : $\boxed{\text{Seul la réponse 'iv' est plausible}}$

c) On considère les fonctions `Coef` et `Trace` suivantes :

```
def Coef(X,Y):
   a = cov(X,Y)/variance(X)
   b = moyenne(Y)-cov(X,Y)/variance(X)*moyenne(X)
   return([a,b])

def Trace(X,Y):
   [a,b] = Coef(X,Y)
   xmin = min(X) ; xmax = max(X)
   plt.plot(X,Y,"*")
   plt.plot( ------- )
   plt.plot([moyenne(X)],[moyenne(Y)],"s")
   plt.grid()
   plt.show()
```

i. *Complétons la fonction* `Trace` *afin de tracer le segment d'extrémités* `(xmin,a*xmin+b)` *et* `(xmax,a*xmax+b)` *:*
Il suffit de créer la liste des abscisses `[xmin,xmax]` et la liste des ordonnées `[a*xmin+b,a*xmax+b]` et de tracer le segment qui les relie.
Le code attendu pour compléter la fonction `Trace(X,Y)` est donc :

```
plt.plot([xmin,xmax],[a*xmin+b,a*xmax+b])
```

ii. La droite qui passe par ces deux points a pour équation $y = ax + b$ avec, d'après la fonction `Coef()`, $a = \dfrac{s_{x,y}}{s_x^2}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

iii. *Quel nom porte cette droite :* Il s'agit de la droite de régression ou de la droite des moindres carrés.

iv. On exécute la fonction `Trace` pour des listes `X` et `Y` quelconques de taille 5. *Pour chacun des trois tracés suivants, indiquons avec justification s'il peut être ou non le résultat de* `Trace` *?*
La droite de régression passe par le point de coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ qui, sur les graphes proposés, est représenté par une carré. Les figures (b) et (c) sont donc exclues et seule reste plausible le tracé (a).

d) i. *Proposons un code qui calcule les valeurs de K_M et v_{max} en suivant la démarche de la partie 1.2 :*
On récupère les coefficients de la droite de régression grâce à la fonction `coef()` puis on utilise le fait que, d'après 1.2.2) :

$$v_{max} = \frac{1}{b} \text{ et } K_M = \frac{a}{b}$$

Un écriture possible est :

```
def Constantes(X,Y):
   [a,b] = Coef(inv(La),inv(Lb))
   v_max = 1/b
   K_M = v_max*a
   return K_M,v_max
```

ii. Pour ces données, le coefficient de corrélation linéaire vaut 0.9995. *Qu'en déduire ?*
Ce coefficient très proche de 1 pour un nombre de données réduit prouve la relation linéaire qui existe entre s_0^{-1} et v_i^{-1}.
On peut dès lors conclure que $v_i = \dfrac{v_{max} s_0}{K_M + s_0}$

✐ L'utilisation des fonctions Python à partir des données fournies permet d'obtenir : $K_M = 0.0183$ et $v_{max} = 3,95 \cdot 10^{-3}$, valeurs finalement assez proches de celles obtenues graphiquement en 1.2.3)

COMPLEMENT : A ne traiter que si l'ensemble des questions précédentes à été abordé

1.4. Analyse de l'équation de Michaelis-Menten par Schnelle et Mendoza

Les parties précédentes ont permis de déterminer expérimentalement les constantes K_M et v_{max}. Dans cette partie, on s'intéresse à la dépendance de s par rapport au temps, sous l'hypothèse de l'Approximation des Etats Quasi Stationnaires (AEQS) selon laquelle la variation de la concentration en complexe « enzyme-substrat » est nulle (car il est consommé par la réaction juste après sa création), à l'exception d'une très courte phase initiale de durée $\delta > 0$. On considère que la concentration en S ne varie pas au cours de cette phase initiale.

Sous cette hypothèse, pour tout $t \in [\delta, +\infty[$, on a $\dfrac{ds}{dt}(t) = -\dfrac{dp}{dt}(t) = -\dfrac{v_{max}s(t)}{K_M + s(t)}$.
On s'intéresse désormais à l'équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{v_{max}s}{K_M + s}$$

avec pour condition initiale $s(\delta) = s_0$.

① Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = xe^x$.

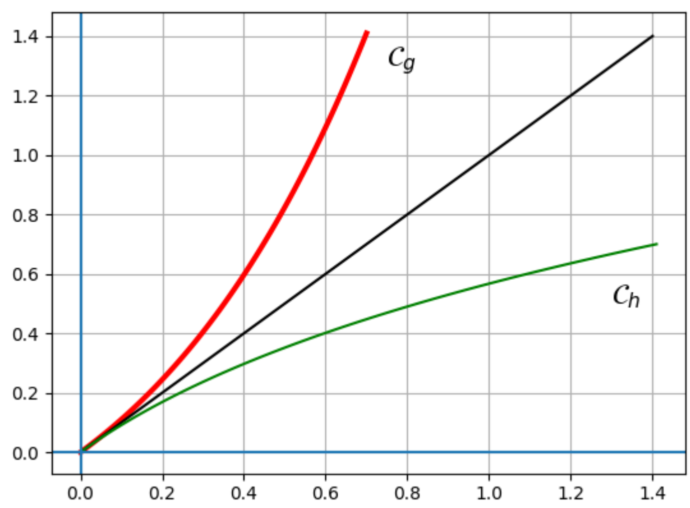
a) *Démontrons que g est strictement croissante :*
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Dès lors :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{la fonction } g \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+}$

b) *Déduisons-en que la fonction h, réciproque de g, est bien définie et donnons son domaine de définition :*
g est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}_+$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Par ailleurs $g(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, donc g est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.
Elle admet donc une application réciproque, $\boxed{h, \text{ bijection de } \mathbb{R}_+ \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$

c) *Traçons la courbe représentative de la fonction h en expliquant la méthode graphique utilisée :*
On utilise le fait que la courbe représentant h est symétrique de celle de g par rapport à la première bissectrice d'équation $(y = x)$.
Si on note que $g'(0) = 1$, on obtient que $y = x$ est tangente à $\mathcal{C}_f$ et à $\mathcal{C}_g$ en $(0, 0)$.
Par ailleurs, $g(x) - x = xe^x - x = x(e^x - 1) > 0$, $\forall x > 0$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente en 0.



② On définit $y(t) = g\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)$. *Écrivons une équation différentielle du premier ordre satisfaite par la fonction y et donnons la condition initiale correspondante :*

On applique les règles de dérivation et on obtient :

$$\begin{aligned} y'(t) &= g'\left(\frac{s(t)}{K_M}\right)\frac{s'(t)}{K_M} \\ &= e^{\frac{s(t)}{K_M}}\left(\frac{s(t)}{K_M}+1\right)\frac{1}{K_M}\frac{-v_{max}s(t)}{K_M+s(t)} \\ &= -\frac{v_{max}}{K_M}e^{\frac{s(t)}{K_M}}\frac{s(t)+K_M}{K_M}\frac{s(t)}{K_M+s(t)} \\ &= -\frac{v_{max}}{K_M}e^{\frac{s(t)}{K_M}}\frac{s(t)}{K_M} = a\frac{s(t)}{K_M}e^{\frac{s(t)}{K_M}} = ay(t) \text{ où } a = -\frac{v_{max}}{K_M} \end{aligned}$$

La condition initiale est $y(\delta) = g\left(\dfrac{s(\delta)}{K_M}\right) = g\left(\dfrac{s_0}{K_M}\right)$.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [\delta, +\infty[,\ y'(t) = ay(t) \text{ avec } a = -\dfrac{v_{max}}{K_M} \text{ et } y(\delta) = g\left(\dfrac{s_0}{K_M}\right)}$

③ *Déduisons des questions précédentes une expression de $y(t)$ puis de $s(t)$ en fonction de t, K_M, v_{max} et s_0 (et faisant appel à la fonction h) :*

Nous savons que les solutions des équations différentielles de la forme $y'(t) = ay(t)$ sont de la forme

$$y(t) = \lambda e^{at} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dès lors :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} / y(t) = \lambda e^{-\frac{v_{max}}{K_M}t}$$

Par ailleurs,

$$y(\delta) = \lambda e^{-\frac{v_{max}}{K_M}\delta} = g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)$$

D'où

$$\lambda = g\left(\frac{s_0}{K_M}\right)e^{\frac{v_{max}}{K_M}\delta} = \frac{s_0}{K_M}e^{\frac{s_0+v_{max}}{K_M}\delta}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [\delta, +\infty[,\ y(t) = \dfrac{s_0}{K_M}e^{\frac{s_0}{K_M}-\frac{v_{max}}{K_M}(t-\delta)}}$

Par ailleurs, $y(t) = g\left(\dfrac{s(t)}{K_M}\right)$ donc $\dfrac{s(t)}{K_M} = h(y(t))$ puisqu'on rappelle que h est la fonction réciproque de g...

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [\delta, +\infty[,\ s(t) = K_M \cdot h\left(\dfrac{s_0}{K_M}e^{\frac{s_0}{K_M}}e^{-\frac{v_{max}}{K_M}(t-\delta)}\right)}$

④ *Proposons une méthode numérique permettant d'approcher les valeurs de la fonction h :*
Le problème est, effectivement, que nous connaissons $g : x \longmapsto xe^x$ mais que nous ne savons pas exprimer sa réciproque h... Il s'agit donc de trouver une méthode numérique permettant d'approcher la solution de l'équation :

$$g(x) = xe^x = y \Leftrightarrow xe^x - y = 0$$

On rappelle que g est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et que c'est donc le cas également de h.
On note que $g(0) = 0 < y$ donc $h(0) = 0 < h(y)$.
De même $g(y) = ye^y > y$ et donc $y > h(y)$.

En conséquence, la fonction $x \longmapsto g(x) - y$ s'annule sur $[0, y]$ et, cette fonction étant continue sur $\mathbb{R}_+$, on peut appliquer la méthode de dichotomie ou la méthode de Newton pour déterminer où elle s'annule.
✐ Dans la pratique, c'est assez compliqué car les valeurs de y sont grandes et le calcul de `np.exp(y)` pose problème. Il faut en fait trouver le moyen de réduire l'intervalle de départ, ce qui est largement possible au regard de la croissance rapide de g...