SUITES NUMERIQUES

Exercice 1 :

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose : $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$.

① *Montrons qu'il existe une unique racine de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$:* On note que f_n est un polynôme à coefficients réels de degré n, en conséquence f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et notamment f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$.

$$f_n(0) = -1 < 0 \text{ et } f_n(x) \underset{x \to \infty}{\sim} x^n \text{ d'où } \underset{x \to +\infty}{lim} f_n(x) = +\infty$$

Par application du théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure que :

$$\exists a_n \in \mathbb{R}_+ / f_n(a_n) = 0$$

Montrons son unicité :

$$f_n'(x) = nx^{n-1} + (n-1)x^{n-2} + \cdots + 2x + 1 \geq 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

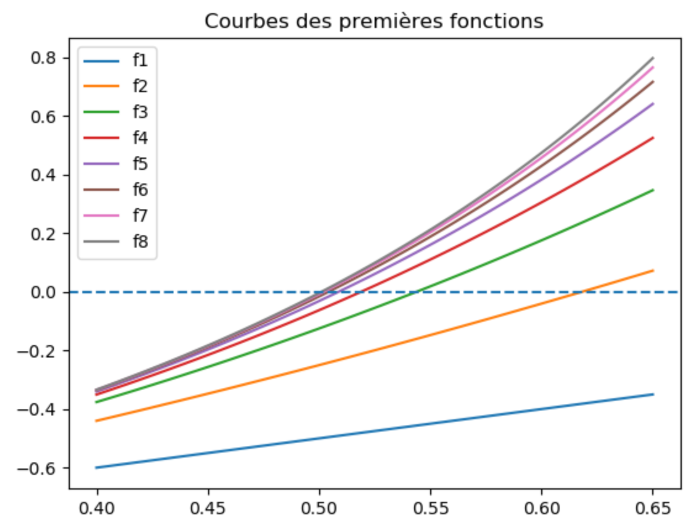
On en déduit que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, puisqu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+$, c'est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[-1, +\infty[$.

Conclusion : $\boxed{\exists! a_n \in \mathbb{R}_+ / f_n(a_n) = 0}$

② *Traçons grâce à Python les courbes des 9 premières fonctions :*

```python
f = lambda n,x:np.sum([x**k for k in range(1,n+1)])-1

def traceCourbes():
    X = np.linspace(0.4,0.65,100)
    for n in range(1,9):
        Y = [f(n,x) for x in X]
        plt.plot(X,Y,label='f'+str(n))
    plt.legend(loc='best')
    plt.axhline(linestyle='--')
```



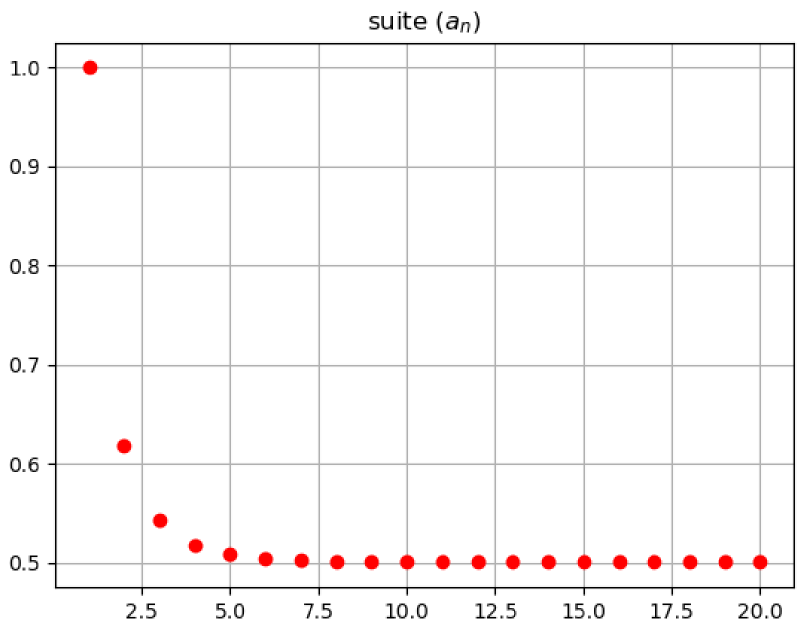
On peut, au regard de ces premières courbes, conjecturer que la suite (a_n) est **décroissante**, **convergente** et de limite égale à $1/2$.

Précisons cette conjecture grâce à l'algorithme de dichotomie dont le principe a été rappelé :

```
def dichotomie(n,eps):
    # détermination de $a_n$ à eps près avec a,b = 0,1
    a,b = 0,1 # 0<an<1 pour tout n>= 2 d'après 1. et 2.
    while b-a > eps:
        c = (a+b)/2
        if f(n,a)*f(n,c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return c # v.a. de alpha_n

def suite(N,eps):
    La = [1] # initialisation avec a_1 = 1
    for n in range(2,N+1): # termes de a_2 à alpha_N
        va = dichotomie(n,eps)
        La.append(va)
    return La

print(suite(20,1e-3))
plt.figure('suite')
plt.plot(np.arange(1,21),suite(20,1e-3),'ro')
plt.show()
```



③ a) *Déterminons le signe de $f_{n+1}(a_n)$:* On note que $f_{n+1}(a_n) = f_n(a_n) + a_n^{n+1}$. D'où :

$$f_{n+1}(a_n) = a_n^{n+1} > 0 \text{ car } a_n > 0$$

b) *A l'aide des variations de f_{n+1}, comparons a_{n+1} et a_n :* f_{n+1} est strictement croissante sur $[0, a_n]$, continue sur $[0, a_n]$, avec $f_{n+1}(0) = -1$ et $f_{n+1}(a_n) > 0$ donc $a_{n+1} \in]0, a_n[$ ou encore $a_{n+1} < a_n$.

Conclusion : $\boxed{(a_n)_{n\geq 1} \text{ est une suite décroissante}}$.

c) La suite (a_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l \in \mathbb{R}_+$.

④ *Montrons que l est solution de l'équation : $\dfrac{1}{1-l} - 2 = 0$:*

Suivons les indications du sujet : a_1 est racine de $f_1 : x \longmapsto x - 1$ donc $a_1 = 1$.
Par ailleurs (a_n) est décroissante. Donc, pour tout $n \geq 1$, $a_n \leq a_2 < 1$.
Dès lors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 1,\ 0 \leq a_n^{n+1} \leq a_2^{n+1} < 1 \text{ car } t \longmapsto t^{n+1} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+$$

De plus, $\lim\limits_{n\to\infty} a_2^{n+1} = 0$ car $0 < a_2 < 1$. Donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n+1} = 0$ (théorème d'encadrement des limites).

Pour conclure, on peut dire que :

$$f_n(a_n) = \sum_{k=1}^{n} a_n^k - 1 = \sum_{k=0}^{n} a_n^k - 2 = \frac{1 - a_n^{n+1}}{1 - a_n} - 2 = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\frac{1}{1-l} - 2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{l = \frac{1}{2}}$$

Correction - Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

① a) *Déterminons, pour tout réel n, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$:*
La fonction $x \longmapsto 1+e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
Dès lors, f_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.
Un calcul immédiat donne : $\boxed{f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n \text{ et } f_n''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3},\ \forall x \in \mathbb{R}}$

b) *Déduisons-en les variations de la fonction f_n :*
f_n'' s'annule en $x=0$. Elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et négative sur $\mathbb{R}_-^*$.
Dès lors, f_n' est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet son minimum en 0 qui vaut $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4} > 0$.
On en déduit que $f_n'(x) > 0$ pour tout x réel.
Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

② a) *Déterminons les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition :* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$, donc immédiatement $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty}$

b) *Déterminons les équations des droites asymptotes (D_n), (D_n') en $+\infty$ et en $-\infty$ de $(\mathcal{C}_n)$:*

— <u>En $+\infty$:</u> $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x(1+e^x)} + n = n$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0$. ***Conclusion*** : $\boxed{(D_n) \text{ a pour équation : } y = nx}$

— <u>En $-\infty$:</u> $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x(1+e^x)} + n = n$.
$\lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1$. ***Conclusion*** : $\boxed{(D_n') \text{ a pour équation : } y = nx+1}$

c) *Déterminons les coordonnées du seul point noté A_n où f_n'' s'annule en changeant de signe :*

$$f_n''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

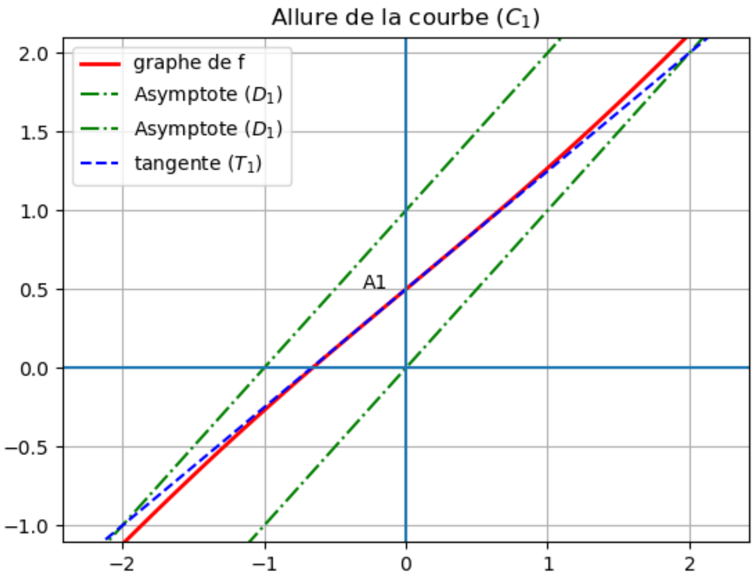
Conclusion : $\boxed{f_n'' \text{ s'annule en changeant de signe en } A_n = (0, f_n(0)) = (0, 1/2)}$

d) *Donnons l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 :*

Par définition (T_1) a pour équation :

$$y = f_1(0) + f_1'(0)x = \frac{1}{2} + (-\frac{1}{4} + 1) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

puis traçons les droites (D_1), (D_1') *et* (T_1) *ainsi que l'allure de la courbe* $(\mathcal{C}_1)$ *:*



③ a) La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto 1 + e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, et donc $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après la question 1.b) elle est strictement croissante.
Donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après les limites obtenues en 2.a).
Dès lors, le théorème de la bijection assure que : $\boxed{f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}}$.

b) *Montrons que l'on a :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$

Par définition $f_n(u_n) = 0$. Or $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\dfrac{e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$.

Or f_n est bijective, strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0}$.

c) *En déduire la limite de la suite* (u_n) *:* Par application du théorème d'encadrement des limites, il est immédiat que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$

d) *Montrons que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$ *:* On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc $-\dfrac{1}{1+e^{u_n}} = nu_n$.

Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} e^{u_n} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = -\dfrac{1}{2}$, soit $nu_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}$

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}}$.

Fonctions Python permettant d'estimer la monotonie de la suite (u_n) :

```
eps = 1e-3

f = lambda n,x:1/(1+np.exp(x))+n*x

def dichotomie(n,eps):
    # détermination de u_n à eps près avec a,b = -1/n,0
    a,b = -1/n,0 # initialisation de la dichotomie puisque -1/n < u_n < 0
    while b-a > eps:
       c = (a+b)/2
       if f(n,a)*f(n,c) <= 0:
          b = c
       else:
          a = c
    return c # v.a. de u_n

def suiteU(N):
    Lu = [] # Liste vide = initialisation de la liste des termes u_n
    for n in range(1,N+1): # termes de u_1 à u_N
       va = dichotomie(n,eps)
       Lu.append(va)
    return Lu

def graphe(N):
    A = suiteU(N)
    abs = np.arange(1,N+1)
    plt.plot(abs,A,'ro')
    plt.grid()
    plt.axvline();plt.axhline()
    plt.show()
    return A
```