Devoir maison 1 : Suites numériques

Exercice 1 :

On considère la fonction f_n définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par :

$$f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \cdots + x^2 + x - 1$$

① Montrer qu'il existe une unique racine de f_n sur $\mathbb{R}_+^*$.
On pose a_n le réel strictement positif tel que : $f_n(a_n) = 0$ et on considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

② Tracer grâce au logiciel de votre choix les courbes des premières fonctions (par exemple : f_1, f_2, f_3, f_4... jusqu'à f_{20})
Conjecturer la monotonie de (a_n) et sa limite.
Préciser cette conjecture grâce à l'algorithme de dichotomie dont le principe est rappelé ci-dessous :

③ a) Déterminer le signe de $f_{n+1}(a_n)$.
b) A l'aide des variations de f_{n+1}, comparer a_{n+1} et a_n (✐ On pourra s'aider d'un tableau de variation). Déterminer la monotonie de (a_n).
c) En déduire que la suite (a_n) converge vers un réel l.

④ Montrer que l est solution de l'équation :

$$\frac{1}{1-l} - 2 = 0$$

indication : Montrer que pour tout $n > 1$, $a_n \leq a_2 < 1$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{n+1}$.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Exercice 2 : ✶✶

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

① a) Déterminer, pour tout réel n, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
b) En déduire les variations de la fonction f_n.

② a) Déterminer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition.
b) Déterminer les équations des droites asymptotes (D_n), (D_n') en $+\infty$ et en $-\infty$ de $(\mathcal{C}_n)$.
c) Déterminer les coordonnées du seul point noté A_n où f_n'' s'annule en changeant de signe. Ce point est appelé point d'inflexion de $(\mathcal{C}_n)$.
d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 puis tracer sur un même dessin les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

③ a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée u_n.
b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
c) En déduire la limite de la suite (u_n).
d) Montrer ensuite que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.