MATHEMATIQUES
Var discrètes et à densité

Problème :

Lu dans le rapport de jury : « *Les jurys ont trouvé le sujet complet par les nombreux thèmes du programme abordés (probabilité, analyse, algèbre linéaire et approximation), dans des parties indépendantes ; les questions de difficultés variées, faisant autant appel à l'esprit d'analyse qu'aux connaissances théoriques. Ils ont aussi apprécié l'absence de question bloquante : il est toujours possible d'avancer dans le sujet en admettant des résultats.*
Même si l'expérience n'a pas vraiment été comprise par certains candidats, beaucoup ont pu bien réagir en traitant ***soigneusement*** *les questions de calcul, d'analyse et d'algèbre linéaire.*

Remarques générales :
Trop de candidats lisent hâtivement les questions posées et, de ce fait, répondent mal :
- *Quand une question demande de calculer une espérance et une variance, il faut faire le calcul et ne pas se contenter de donner les résultats en invoquant le cours. Exemples : les questions A/1.a) et b), A/2.b)*
- *Les questions A/3.b) demande de montrer que la série de terme général u_n converge. Beaucoup trop de candidats montrent que la suite (u_n) converge puis ensuite calculent $\mathbb{P}(X = k)$ en montrant que la série converge.*
- *Question C/2.d) : l'énoncé demande que la première ligne de P soit constituée de 1. Trop de candidats l'ont oublié.*

»

On suppose dans l'ensemble du problème que θ suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\alpha}$ où $\alpha > 0$ est un réel fixé.

Partie A : Détermination des lois de X et de N

① On commence par une étude de la loi de θ.

a) Une densité f de la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\alpha}$ suivie par θ est :

$$f(x) = \frac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-\frac{x}{\alpha}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

b) *Calculons l'espérance et la variance de la variable aléatoire θ en fonction de α :* C'est une question de cours. **Il faut savoir retrouver ce résultat**. Soit vous travaillez (parce que vous êtes plus à l'aise) avec une densité d'une loi exponentielle de paramètre λ et vous remplacez en fin de calcul λ par $1/\alpha$, soit vous reprenez la démonstration avec la fonction f ci-dessus. Quelle que soit la méthode, vous devez obtenir :
Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(\theta) = \alpha \text{ et } V(\theta) = \alpha^2}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question assez bien traitée par ceux qui ont fait le calcul : très peu ont fait une IPP avec des bornes infinies [c'est bien !], les croissances comparées ont été précisées. Quelques candidats, quand même, « trichent » ou passent des* *calculs non triviaux sous silence, pour arriver au bon résultat.* »

c) *Calculons* la fonction de répartition F de θ : là encore c'est une question de cours. Nous demander de la « calculer » supposer qu'on la retrouve par le calcul, soit : Sachant que $\theta(\Omega) = \mathbb{R}_+^*$, on a :

- Si $x < 0$, $F(x) = \mathbb{P}(\theta \leq x) = 0$
- Si $x \geq 0$, $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} dt$ (relation de Chasles).
  Soit
  $$F(x) = \left[-e^{-t/\alpha}\right]_0^x = 1 - e^{-x/\alpha}$$

Conclusion : $\boxed{F(x) = (1 - e^{-x/\alpha})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)}$

Lu dans le rapport de jury : « *En général bien traité. Des étourderies :* $\displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\alpha} e^{-t/\alpha} dt$, $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} dx$ »

d) *Justifions le choix d'une loi exponentielle pour modéliser la variable aléatoire θ en précisant le sens qui pourrait être donné à α :* θ étant égale à l'angle total en radians dont a tourné le point I_0, θ prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. La seule loi usuelle au programme qui prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$ est la loi exponentielle. Elle est fortement asymétrique (les angles plus petits ont une probabilité plus grande de se produire que les angles très grands) et son espérance valant l'inverse de son paramètre, il suffit de considérer que le paramètre est une mesure de la résistance de la roulette qui s'oppose au mouvement (plus λ est faible plus θ sera grand en moyenne) ou encore que $\alpha = \dfrac{1}{\lambda}$ mesure la force du lanceur (plus α est grand, plus l'angle moyen sera grand).

Écrivons une fonction Python ***`simulTheta(alpha)`*** *de paramètre le réel $\alpha > 0$ et qui retourne une valeur prise par la variable aléatoire θ :* On peut là encore considérer que c'est une question de cours car la modélisation des lois exponentielles est au programme...
On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ alors $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-U)$ où $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ suit également une loi $\exp(\lambda)$.
Dès lors, sachant que `rdm.random()` modélise la loi uniforme sur $[0, 1]$, il suffit d'écrire :

```
def simulTheta(alpha):
   return -alpha*log(1-rdm.random())
```

② On s'intéresse maintenant à la loi de N.

a) *Pour $n \in \mathbb{N}$, à quelles valeurs de θ correspond l'événement $(N = n)$?* L'événement $(N = n)$ est réalisé si, et seulement si le nombre de tours complets effectué est égale à n, autrement dit si le point I_0 a tourné d'un angle compris entre $2\pi n$ (inclus) et $2\pi(n + 1)$ (exclus).
Autrement dit :
$$\boxed{(N = n) = (\theta \in [2\pi n, 2\pi(n + 1)[)}$$

On nous demande d'en déduire que N suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}$ (On pose $q = 1 - p$) :
On commence par noter que N est à valeurs dans $\mathbb{N}$ ou encore que $N(\Omega) = \mathbb{N}$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(N = n) = F(2\pi(n+1)) - F(2\pi n)$ car θ est une variable à densité
$P(N = n) = e^{-2\pi n/\alpha} - e^{-2\pi(n+1)/\alpha} = (1 - e^{-2\pi/\alpha})\left(e^{-2\pi/\alpha}\right)^n$
Conclusion : $\boxed{N \text{ suit la loi } \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p) \text{ avec } p{=}1 - e^{-2\pi/\alpha} \text{ et donc } q = e^{-2\pi/\alpha}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains essayent d'obtenir une loi géométrique à tout prix (en affirmant, par exemple, que l'expérience consiste en la réalisation d'épreuves indépendantes). Rappelons que dans une même partie de problème, le candidat doit commencer par chercher un lien éventuel avec les questions précédentes.*
Beaucoup de candidats semblent ignorer la version de la loi géométrique sur $\mathbb{N}$. Certains même parviennent au bon résultat, mais font une remarque du style : « résultat faux car je devrais avoir un q^{n-1} et non q^n ». »

b) *Écrivons une fonction Python* ***`simulN(alpha)`*** *qui, à l'aide de la fonction écrite dans la question précédente, modélise une réalisation de la variable aléatoire N :* On commence par simuler le choix d'un angle θ selon la loi exponentielle de paramètre $1/alpha$.
D'après la question précédnte :

$$(N = n) = (\theta \in [2\pi n, 2\pi(n+1)[)$$

Or

$$2\pi n \leq \theta < 2\pi(n+1) \Leftrightarrow n \leq \frac{\theta}{2\pi} < n + 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2\pi} - 1 < n \leq \frac{\theta}{2\pi}$$

donc, puisque $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n = \left\lfloor \frac{\theta}{2\pi} \right\rfloor$$

La fonction Python demandée peut donc s'écrire :

```
def simulN(alpha):
   theta = simulTheta(alpha)
   return int(theta/(2*pi)) # on aura pris soin de faire un « from math import * »
```

c) *Écrivons une fonction* ***`estimeEspN(alpha,m)`*** *où m est un entier naturel supposé grand, qui permet d'estimer l'espérance de la variable aléatoire N :* On va faire modéliser un grand nombre m de réalisations indépendantes de la variable aléatoire N afin d'en calculer la moyenne empirique. La loi faible des grands nombres nous assure alors que l'écart entre cette moyenne et l'espérance qu'on cherche à estimer est d'autant plus faible que m est grand.
Soit :

```
def estimeEspN(alpha,m)
    S = 0
    for k in range(m):
       S += simulN(alpha)
    return S/m
```

d) *Calculons l'espérance et la variance de N en fonction de q :*

On rappelle que $N \hookrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{N}}(p)$ donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(N) = \dfrac{q}{p}$ et $\mathbb{V}(N) = \dfrac{q}{p^2}$

✐ **On sait pouvoir retrouver** ce résultat à partir de l'espérance et la variance de la loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, MAIS ce n'est pas la méthode attendue ici puisqu'un calcul nous est demandé...

Allons-y !
On a obtenu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(N = n) = pq^n$ où $q = e^{-2\pi/\alpha} \in]0, 1[$ puisque $\alpha > 0$.
La série $\sum n\mathbb{P}(N = n) = \sum pnq^n$ est de même nature que $\sum nq^{n-1}$ qui est une série géométrique dérivée convergente puisque $|q| < 1$ et que la multiplication par le scalaire pq ne change pas la nature de la série.
Donc $\sum n\mathbb{P}(N = n)$ converge (absolument, l'absolue convergence étant assurée par la stricte positivité des termes de la série). Donc $\boxed{\mathbb{E}(N) \text{ existe}}$ et

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(N = n) = pq\sum_{n=0}^{\infty} nq^{n-1} = pq\frac{1}{(1-q^2)} = \boxed{\frac{q}{p}}$$

Pour la détermination de $\mathbb{V}(N)$, on utilise la formule de Koenig-Huygens et on commence par étudier la nature et la somme de la série $\sum n^2\mathbb{P}(N = n)$:

$$\sum_{n\geq 0} n^2\mathbb{P}(N = n) = \sum_{n\geq 0}(n(n-1) + n)\mathbb{P}(N = n)$$

avec :

– $\sum_{n\geq 0} n(n-1)pq^n$ de même nature que $\sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$ qui converge car série géométrique dérivée seconde avec $0 < q < 1$ de somme $S_1 = \dfrac{2}{(1-q)^3}$
– $\sum_{n\geq 0} npq^n$ converge de somme $\mathbb{E}(N)$.

Donc $\sum_{n\geq 0} n^2\mathbb{P}(N = n)$ converge comme somme de séries convergentes de somme :

$$S = pq^2\frac{2}{(1-q)^3} + \mathbb{E}(N) = \frac{2q^2}{(1-q)^2} + \frac{q}{p} = \frac{2q^2 + qp}{p^2}$$

Donc, $\mathbb{V}(N)$ existe et vaut :

$$\mathbb{V}(N) = \mathbb{E}(N^2) - \mathbb{E}^2(N) = \frac{2q^2 + qp}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q^2 + qp}{p^2} = \frac{q^2 + q(1-q)}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(N) = \dfrac{q}{p} = \dfrac{e^{-2\pi/\alpha}}{1 - e^{-2\pi/\alpha}},\ \mathbb{V}(N) = \dfrac{q}{p^2} = \dfrac{e^{-2\pi/\alpha}}{\left(1 - e^{-2\pi/\alpha}\right)^2}}$

Lu dans le rapport de jury : « *La loi de N est « presque » à la question a). Il suffit de déterminer $N(\Omega)$ pour préciser le type de loi géométrique.*
La convergence des séries géométriques n'est pas toujours utilisée, ou mal justifiée ($q \in [0, 1[$!) »

On valide notre réponse grâce à la fonction Python `estimEspN` en prenant successivement $\alpha = 3\pi$, 5π et 10π. En effet, en écrivant :

```
p = 1-exp(-2*pi/alpha)
print("espérance estimée = ",estimeEspN(alpha,m))
print("espérance calculée = ",(1-p)/p)
```

on obtient pour $m = 10000$:
- pour $\alpha = 3\pi$, `espérance estimée = 1.04, espérance calculée = 1.05`
- pour $al = 5\pi$, `espérance estimée = 2.02, espérance calculée = 2.03`
- pour $al = 10\pi$, `espérance estimée = 4.47, espérance calculée = 4.52`

③ Nous déterminons maintenant la loi conjointe du couple (X, N). Soient k en entier entre 1 et s et $n \in \mathbb{N}$. On suppose ici qu'à l'instant initial, le repère désigne le point I_0, comme sur la **figure** 1.

a) *Déterminons la probabilité de l'événement conjoint* $((X = k) \cap (N = n))$ Commençons par raisonner à partir des figures qui nous sont données (à savoir avec $s = 9$) en rappelant que $(N = n)$ est réalisé signifie que $(2\pi n \leq \theta < 2\pi(n + 1)[)$ et donc que $((X = k) \cap (N = n))$ est réalisé si la roulette, à l'issue de ses n tours complets, a ensuite tourné de telle sorte qu'elle que le repère se trouve à l'intérieur du secteur k, ce qui représente ω radians, avec :

$$(k-1)\frac{2\pi}{9} < w < k\frac{2\pi}{9}$$

Précisons cet idée pas à pas :
- $(X = \mathbf{1}, N = n) = \left(2\pi n \leq \theta < 2\pi n + \mathbf{1} \cdot \dfrac{2\pi}{9}\right)$
- $(X = \mathbf{2}, N = n) = \left(2\pi n + \mathbf{1} \cdot \dfrac{2\pi}{9} \leq \theta < 2\pi n + \mathbf{2} \cdot \dfrac{2\pi}{9}\right)$
- $\cdots$
- $(X = \mathbf{9}, N = n) = \left(2\pi n + \mathbf{8} \cdot \dfrac{2\pi}{9} \leq \theta < 2\pi n + \mathbf{9} \cdot \dfrac{2\pi}{9}\right)$

Plus généralement (pour tout $s \geq 2$), on peut écrire que :

$$((X = \mathbf{k}) \cap (N = n)) = \left(2\pi n + (k-1)\frac{2\pi}{s} \leq \theta < 2\pi n + \mathbf{k}\frac{2\pi}{s}\right)$$

Et donc :

$$\begin{aligned}
P(X = k, N = n) &= F\left(2\pi n + \frac{2k\pi}{s}\right) - F\left(2\pi n + \frac{2(k-1)\pi}{s}\right) \\
&= e^{-\frac{\left(2\pi n + \frac{2(k-1)\pi}{s}\right)}{\alpha}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha s}}\right) \\
&= q^{n+(k-1)/s}(1 - q^{1/s}) = q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{P(X = k, N = n) = q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)}$

✐ *Remarque :* Les calculs peuvent être considérablement allégés si on remarque dès le départ que :

$$F(x) = 1 - q^{x/(2\pi)},\ \forall x \geq 0$$

Dès lors :

$$\boxed{\mathbb{P}(X=k, N=n) = 1 - q^{n+k/s} - \left(1 - q^{n+(k-1)/s}\right) = q^n q^{k/s}(q^{-1/s} - 1)}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des candidats ont admis l'indépendance des variances N et X (ce qui était impossible à cet étape du calcul). Plusieurs candidats débutent le calcul avec un événement faux, et aboutissent au bon résultat ! Ces calculs « miraculeux » n'abusent pas les correcteurs.* »

b) *Montrons que pour k fixé, la série de terme général $u_n = \mathbb{P}((X=k) \cap (N=n))$ est convergente :*
On note que $q^{k/s}(q^{-1/s} - 1)$ est une constante et donc que la série de terme général u_n est de même nature que $\sum q^n$ qui converge car $|q| < 1$.
Conclusion : $\boxed{\text{la série de terme général } u_n = \mathbb{P}((X=k) \cap (N=n)) \text{ converge}}$

On cherche à en déduire la probabilité de l'événement $(X=k)$: On applique la Formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements : $\{(N=n), n \in \mathbb{N}\}$. Alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k, N=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right) \\ &= q^{k/s}(q^{-1/s} - 1) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^{k/s}(q^{-1/s} - 1)\frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X=k) = \dfrac{q^{\frac{k}{s}}\left(q^{-\frac{1}{s}} - 1\right)}{1-q}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Confusion entre suite et séries.* »

c) *Vérifions que $\sum_{k=1}^{s} \mathbb{P}(X=k) = 1$:* On commence par noter que $X(\Omega) = [\![1, s]\!]$ et donc c'est légitime de trouver une somme égale à 1 (loi de probabilité).
Par ailleurs, d'après ce qui précède :

– ***Rédaction 1 :***

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s} \mathbb{P}(X=k) &= \frac{q^{-1/s} - 1}{1-q} \sum_{k=1}^{s} \left(q^{1/s}\right)^k \\ &= \frac{q^{-1/s} - 1}{1-q} q^{1/s} \frac{1 - (q^{1/s})^s}{1 - q^{1/s}} \\ &= \frac{1 - q^{1/s}}{1-q} \frac{1-q}{1 - q^{1/s}} = \frac{1-q}{1-q} = 1\end{aligned}$$

– ***Rédaction 2 :*** (télescopages)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{s} \mathbb{P}(X=k) &= \frac{q^{-1/s}-1}{1-q} \sum_{k=1}^{s} q^{k/s} \\ &= \frac{1}{1-q} \sum_{k=1}^{s} \left(q^{(k-1)/s} - q^{k/s}\right) \\ &= \frac{1}{1-q}\left(1-q^{s/s}\right) = 1\end{aligned}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des erreurs* ***impardonnables*** *de calcul : par exemple*

$$q^{k/s} = q^{1/s} q^k, \text{ voire } q^{k/s} = \frac{q^k}{q^s}$$

Encore une fois, les calculs faux n'abusent pas le correcteur. »

d) *Écrivons une fonction Python* ***simulX(alpha,s)*** *qui retourne une valeur entière comprise entre* 1 *et* s *simulant le numéro du secteur sur lequel s'arrête le repère :*
On sait simuler l'angle dont à tourné le point I_0 grâce à la fonction `simulTheta(alpha)` et, grâce à elle, on peut en déduire le nombre n de tours complets effectués, à savoir `n = int(theta/(2*pi))`.
Dès lors, grâce à la question 3.a)

$$\left(2\pi n + (k-1)\frac{2\pi}{s} \leq \theta < 2\pi n + k\frac{2\pi}{s}\right) \text{ est réalisé}$$

Il suffit donc d'écrire pour en déduire la valeur de k :

$$\begin{aligned}2\pi n + (k-1)\frac{2\pi}{s} \leq \theta < 2\pi n + k\frac{2\pi}{s} &\Leftrightarrow (k-1)\frac{2\pi}{s} \leq \theta - 2\pi n < k\frac{2\pi}{s} \\ &\Leftrightarrow k-1 \leq \frac{s}{2\pi}(\theta - 2\pi n) < k \\ &\Leftrightarrow \frac{s}{2\pi}(\theta - 2\pi n) < k \leq \frac{s}{2\pi}(\theta - 2\pi n) + 1\end{aligned}$$

On aura donc, les valeurs de θ et n étant connues, $k = \left\lfloor \frac{s}{2\pi}(\theta - 2\pi n) + 1 \right\rfloor$

La simulation des valeurs prises par X peut donc s'écrire :

```
def simulX(alpha,s):
    theta = simulTheta(alpha)
    n = int(theta/(2*pi))
    return int(s*(theta-2*pi*n)/(2*pi))+1
```

On nous demande d'en déduire une fonction `freqX(alpha,s,m)` dont le paramètre est un entier naturel supposé grand et qui renvoie la liste de longueur s des fréquences de réalisation des événements $(X = k)$ pour $k \in [\![1, s]\!]$ au cours de m simulations indépendantes de la variable aléatoire X :
On commence par initialiser la liste `F` des fréquences de chacun des s secteurs par une liste de s zéros.

On appelle ensuite un grand nombre de fois la fonction `simulX()` et pour chacun des secteurs obtenus, on augmente sa fréquence absolue de 1. On fera attention le secteur d'indice `k` a sa fréquence dans `F[k-1]` pour $k \in [\![1, s]\!]$...

```
def freqX(alpha,s,m):
    F = [0]*s
    for i in range(m):
       k = simulX(alpha,s)
       F[k-1] += 1
    return [f/m for f in F]
```

On pourra vérifier avec $\alpha = 5 * \pi$, $s = 9$ et $m = 1000$ que les résultats sont proches de ceux obtenus en faisant :
`print([q**(k/s)*(q**(-1/s)-1)/(1-q) for k in range(1,s+1)])`

e) *Montrons que les variables aléatoires X et N sont indépendantes :*
On rappelle que $P(X = k, N = n) = q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)$
et par ailleurs :
$P(X = k)P(N = n) = pq^n \dfrac{q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)}{1-q} = q^n q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)$
$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \{1, .., s\}$, $P(X = k, N = n) = P(X = k)P(N = n)$
Conclusion : $\boxed{X \text{ et } N \text{ sont indépendantes}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Les quantificateurs manquent presque toujours. Dans plusieurs copies, on peut lire : « si X et N sont indépendantes alors... »*

Partie B : Numéros gagnants équiprobables

Nous allons voir ici deux méthodes simples pour tenter de rendre les numéros équiprobables.

① Dans cette question, on examine l'idée intuitive suivante : si la roulette est lancée suffisamment fort pour faire un très grand nombre de tours, la position initiale n'a presque plus d'influence sur le résultat.

a) *Calculons la limite $\mathbb{P}(X = k)$ quand α tend vers $+\infty$:*
Soit $k \in [\![1, s]\!]$. On a vu dans la partie précédente que

$$\mathbb{P}(X = k) = q^{k/s}\left(q^{-1/s} - 1\right)\frac{1}{1-q}$$

En remplaçant q par son expression, on obtient :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2k\pi/(\alpha s)}\left(e^{2\pi/(\alpha s)} - 1\right)}{1 - e^{-2\pi/\alpha}}$$

On rappelle alors que $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$ donc, pour α qui tend vers ∞ :

$$\mathbb{P}(X = k) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{2\pi/(\alpha s)}{-(-2\pi/\alpha)}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X=k) \underset{\alpha\to+\infty}{\sim} \frac{1}{s}}$

b) *Concluons :* Quand α prend de très grandes valeurs, alors X suit presque une loi uniforme sur $[\![1,s]\!]$.
On peut le dire autrement : Si la roulette est lancée suffisamment fort (et que les roulements sont parfaitement graissés...) la position initiale n'a presque plus d'influence sur le résultat.

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question est* ***discriminante*** *et fait le tri entre les candidats raisonnables et ceux qui acceptent des résultats incohérents (limite nulle, égale à 1, voir même infinie) ; ce qui les conduit à des conclusions du genre : « plus la roulette est lancée fort, plus on est sûr de gagner », « si on lance la roulette trop fort, elle ne s'arrête jamais ». Lorsque le résultat est trouv, l'utilisation des équivalents n'est pas maîtrisée dans un cas sur deux.* »

c) *Validons notre réponse grâce à la fonction* `freqX() écrite en A/3.d) avec` $s=9$ `(et donc` $1/s=0.11$`) :`

– Pour $\alpha=2\pi$, `freqX(alpha,9,1000)` retourne :
`[0.152, 0.154, 0.132, 0.122, 0.109, 0.092, 0.09, 0.081, 0.068]`
– Pour $\alpha=10\pi$, `freqX(alpha,9,1000)` retourne :
`[0.136, 0.109, 0.116, 0.103, 0.111, 0.097, 0.123, 0.087, 0.118]`
– Pour $\alpha=100\pi$, `freqX(alpha,9,1000)` retourne :
`[0.11, 0.113, 0.113, 0.1, 0.118, 0.099, 0.101, 0.119, 0.127]`

Conclusion : $\boxed{\text{On retrouve bien la convergence vers une loi uniforme sur } [\![1,9]\!].}$

② Dans cette question et la suivante, nous examinons la possibilité de dessiner sur la roulette des secteurs angulaires non réguliers dans le cas particulier $s=2$. On suppose donc la roulette divisée en deux secteurs : le secteur 1 est une portion de disque d'angle $\pi-\omega$ (où $\omega\in]0,\pi[$) et le secteur 2 la portion restante. La position initiale est au point I_0 (voir **figure 4** ci-dessous)

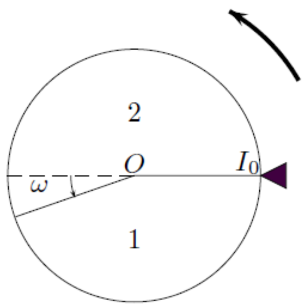

Figure 4

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on définit $ch(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

a) ch et sh sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ car somme de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (à savoir $x\longmapsto \dfrac{e^x}{2}$ et $x\longmapsto\dfrac{e^{-x}}{2}$) et en notant que la dérivée de e^{-x} vaut $-e^{-x}$, on a immédiatement que pour tout x réel : $\boxed{ch'(x)=sh(x) \text{ et } sh'(x)=ch(x)}$. Enfin :

$$\boxed{ch^2(x) - sh^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{4}{4} = 1}$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$, *exprimons* $\mathbb{P}(X = 1, N = n)$ *et* $\mathbb{P}(X = 2, N = n)$ *en fonction de* n, α *et* ω *:*

- $P\left(X = 1, N = n\right) = P\left(2\pi n < \theta < 2\pi n + \pi - \omega\right) = F\left(2\pi n + \pi - \omega\right) - F\left(2\pi n\right)$
  Donc $P\left(X = 1, N = n\right) = e^{-\dfrac{2\pi n}{\alpha}}\left(1 - e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}}\right)$

- $P\left(X = 2, N = n\right) = P\left(2\pi n + \pi - \omega < \theta < 2\pi n + 2\pi\right) = F\left(2\pi(n+1)\right) - F\left(2\pi n + \pi - \omega\right)$
  Donc $P\left(X = 2, N = n\right) = e^{-\dfrac{2\pi n}{\alpha}}\left(e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}} - e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}\right)$

c) *Déduisons-en que* $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) \Leftrightarrow \omega = \alpha \ln\left(ch\left(\dfrac{\pi}{\alpha}\right)\right)$ $(*)$

- On commence par déterminer $\mathbb{P}(X = 1)$ et $\mathbb{P}(X = 2)$:
  La question précédente nous invite à utiliser la **Formule des probabilités totales** avec le système complet d'événements : $\{(N = n), n \in \mathbb{N}\}$.
  Ce qui donne :
  $$P\left(X = 1\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X = 1, N = n\right) = \left(1 - e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}\right)^n$$
  série convergente car $0 < e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}} < 1$
  $$\boxed{P\left(X = 1\right) = \frac{1 - e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}}}{1 - e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}}$$
  De même :
  $$P\left(X = 2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P\left(X = 2, N = n\right) = \left(e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}} - e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}\right)^n$$
  $$\boxed{P\left(X = 2\right) = \frac{e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}} - e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}{1 - e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}}}}$$
- On traite ensuite l'égalité :
  $$\begin{aligned} P\left(X = 1\right) = P\left(X = 2\right) &\Longleftrightarrow e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}} - e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}} = 1 - e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}} \\ &\Longleftrightarrow 2e^{-\dfrac{\pi - \omega}{\alpha}} = 1 + e^{-\dfrac{2\pi}{\alpha}} \\ &\Longleftrightarrow e^{\dfrac{\omega}{\alpha}} = \frac{e^{\dfrac{\pi}{\alpha}} + e^{\dfrac{-\pi}{\alpha}}}{2} = ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) > 0 \end{aligned}$$
  Si a et b sont strictement positifs, $a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b$

D'où
$$P(X=1)=P(X=2) \Longleftrightarrow \frac{\omega}{\alpha}=\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)$$

Conclusion : $\boxed{P(X=1)=P(X=2) \Longleftrightarrow \omega=\alpha\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)}$

d) *On suppose que ω est fixé par la relation précédente. X et N sont-elles indépendantes ?*

D'après les questions précédentes : $P(X=1,N=n)=e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}}\left(1-e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}\right)$

$$P(X=1)\,P(N=n)=\frac{1-e^{-\frac{\pi-\omega}{\alpha}}}{1-e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}}(1-e^{-\frac{2\pi}{\alpha}})e^{-\frac{2\pi n}{\alpha}}=P(X=1,N=n)$$

Les événements $(X=1)$ et $(N=n)$ sont indépendants d'où $(X=2)=\overline{(X=1)}$ et $(N=n)$ le sont aussi

$\forall n\in\mathbb{N},\ \forall k\in\{1,2\},\ P(X=k\cap N=n)=P(X=k=P(N=n)$

$$\boxed{X \text{ et } N \text{ sont indépendantes}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Des candidats essayent, sans succès, d'utiliser le résultat de la partie A/.*

On remarque de grossières erreurs dans la manipulation des événements et de leurs probabilités. Ainsi, dans B/2.b) :
$$\mathbb{P}(X=1,N=n)+\mathbb{P}(X=2,N=n)=1$$
ou dans B/2.c)
$$\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=2)\Leftrightarrow\mathbb{P}(X=1,N=n)=\mathbb{P}(X=2,N=n)$$
Parmi les candidats ayant une erreur de signe à la question B/2.b), certains reconnaissent leur erreur et continuent avec le résultat de l'énoncé : ils ont raison bien entendu »

③ On pose : $\varphi(\alpha)=\alpha\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)$

a) La fonction $\alpha\longmapsto\pi/\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction ch est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0,+\infty[$ (somme d'exponentielles), donc la fonction $\alpha\longmapsto ch(\pi/\alpha)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Par ailleurs la fonction $\ln$ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$
Donc, par composition, φ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$
$\forall\alpha>0,\ \varphi'(\alpha)=\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)-\frac{\pi}{\alpha}sh\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\frac{1}{ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)}=-\psi\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)$

b) ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0,\ \psi'(x)=\frac{shx}{chx}+x\frac{ch^2x-sh^2x}{ch^2x}-\frac{shx}{chx}=\frac{x}{ch^2x}>0$
ψ est strictement croissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{0}\psi(x)=0-\ln(1)=0$

Donc $\boxed{\forall x>0,\ \psi(x)>0}$

Or, $\forall\alpha>0,\ \varphi'(\alpha)=-\psi\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)<0$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est strictement décroissante sur }]0,+\infty[}$

Lu dans le rapport de jury : « *Quelques candidats repassent aux exponentielles pour dériver alors que l'énoncé donne les dérivées de ch et sh. Ils perdent ainsi un temps précieux.* »

c) $\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right) = \ln\frac{e^{\frac{\pi}{\alpha}}+e^{\frac{-\pi}{\alpha}}}{2} = \ln\left(e^{\frac{\pi}{\alpha}}\right) + \ln\left(\frac{1+e^{\frac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right)$

$\varphi(\alpha) = \alpha\frac{\pi}{\alpha} + \alpha\ln\left(\frac{1+e^{\frac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right)$

$\lim\limits_{0}\ln\left(\frac{1+e^{\frac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right) = \ln\frac{1}{2}$ d'où $\lim\limits_{0}\alpha\ln\left(\frac{1+e^{\frac{-2\pi}{\alpha}}}{2}\right) = 0$

$$\boxed{\lim_{0+}\varphi(\alpha) = \pi}$$

φ étant décroissante sur $]0,+\infty[\,, \forall\alpha > 0,\ \varphi(\alpha) < \pi$

D'autre part, $\forall\alpha > 0,\ \varphi(\alpha) > 0$ car $ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) > 1$ (on montrer rapidement que $\forall x > 0,\ chx > 1$)

D'où $\forall\alpha > 0,\ \varphi(\alpha) \in]0,\pi[$

Donc en prenant $\omega = \varphi(\alpha)$, on eut diviser le disque en deux secteurs le premier d'angle $\pi-\omega$ et le deuxième d'angle $\pi+\omega$ de telle sorte qu'il y a équiprobabilité d'obtenir l'un ou l'autre des secteurs.

d) $\lim\limits_{+\infty}ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) = 1$ d'où $\ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right) \underset{+\infty}{\backsim} ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - 1$

$ch(x) = \dfrac{1+x+\frac{x^2}{2}+1-x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

D'où $ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right) - 1 \underset{+\infty}{\backsim} \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^2$

$\boxed{\varphi(\alpha) \underset{+\infty}{\backsim} \frac{\pi^2}{2\alpha}}$

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{+\infty}\varphi(\alpha) = 0}$

Quand α tend vers $+\infty$ (c'est-à-dire quand la roulette fait un grand nombre de tours), ω tend vers 0 et on retrouve le résultat du B avec $s = 2$, à savoir qu'il y a équiprobabilité des secteurs de même angle, quand α est trés grand.

Lu dans le rapport de jury : « *Le calcul du développement limité de $ch(x)$ est généralement correct. Signalons quelques erreurs surprenantes : $ch(x) = \cos(x)$ ou encore :*

$$e^x = 1 + \frac{x^2}{2} + \circ(x^2)$$

La limite de φ est rarement abordée. Plusieurs candidats invoquent les croissances comparées pour la limite ! »

Partie C : Parties enchaînées

On supposera dans toute cette partie que $s = 3$ (voir **figure** 5). La roulette est maintenant lancée plusieurs fois de suite, la position initiale avant le premier lancer état en I_0. A l'issue de chaque mouvement :
– Si le numéro gagnant est 1, la roulette est relancée depuis la position I_1.
– Si le numéro gagnant est 2, la roulette est relancée depuis la position I_2.
– Si le numéro gagnant est 3, la roulette est relancée depuis la position I_3.

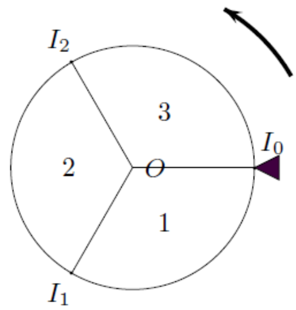

Figure 5

On rappelle les notations ($q = e^{-2\pi/\alpha}$) : $q_0 = \dfrac{1 - q^{1/3}}{1 - q}$ et $r = q^{1/3}$ ou encore $r^3 = q$.

① a) *Pour* $1 \leq k \leq 3$, *calculons* $\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1} = k)$ *:*

Méthode 1 : On exploite les résultats de la partie A/ en prenant $s = 3$.

Pour faire apparaître les notations introduites dans cette partie, on écrit que :

$$\boxed{\mathbb{P}(X = k) = q^{k/3}\frac{q^{-1/3} - 1}{1 - q} = q^{k/3}q^{-1/3}\frac{1 - q^{1/3}}{1 - q} = q^{(k-1)/3}q_0 = r^{k-1}q_0}$$

Dès lors, sachant que la roulette est relancée depuis I_1,

– obtenir le numéro 1 revient à lancer la roulette depuis I_0 pour obtenir le numéro 3, ce qui conduit à :

$$\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1} = 1) = \mathbb{P}(X = 3) = r^2 q_0$$

– obtenir le numéro 2 revient à lancer la roulette depuis I_0 pour obtenir le numéro 1, ce qui conduit à :

$$\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1} = 2) = \mathbb{P}(X = 1) = q_0$$

– obtenir le numéro 3 revient à lancer la roulette depuis I_0 pour obtenir le numéro 2, ce qui conduit à :

$$\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1} = 3) = \mathbb{P}(X = 2) = r q_0$$

Méthode 2 : On utilise la même démarche calculatoire que celle utilisée dans A/.
Sachant que le lancer d'indice i s'arrête sur le numéro 1, la roulette est relancée depuis la position I_1 et au lancer suivant, on obtiendra le numéro 1 si la roulette tourne de θ radians avec :

$$2n\pi + 4\pi/3 < \theta < 2n\pi + 2\pi,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Dès lors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(2n\pi + 4\pi/3 < \theta < 2n\pi + 2\pi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(F(2n\pi + 2\pi) - F(2n\pi + 4\pi/3)\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-(2n\pi+4\pi/3)/\alpha} - e^{-(2n\pi+2\pi)/\alpha}\right) \\
&= \left(e^{-4\pi/(3\alpha)} - e^{-2\pi/\alpha}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n\pi/\alpha} \\
&= \left(q^{2/3} - q\right) \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \left(q^{2/3} - q\right) \frac{1}{1-q} = q^{2/3} \frac{1-q^{1/3}}{1-q}
\end{aligned}$$

Soit, avec les notations de l'énoncé, $\boxed{\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1) = \mathbb{P}(X=3) = r^2 q_0}$

Les calculs sont globalement les mêmes pour les deux autres probabilités... Par exemple, on obtiendra le numéro 2 en partant de I_1 si $2n\pi < \theta < 2n\pi + 2\pi/3$ et on obtiendra le numéro 3 si $2n\pi + 2\pi/3 < \theta < 2n\pi + 4\pi/3$

Lu dans le rapport de jury : « *Peu souvent traité, pas si mal quand fait (souvent dans de bonnes copies de probabilités.* »

b) *Montrons ensuite que la matrice* $A = q_0 \begin{pmatrix} r^2 & r & 1 \\ 1 & r^2 & r \\ r & 1 & r^2 \end{pmatrix}$ *contient à l'intersection de la ligne k et de la colonne k' la probabilité conditionnelle* $\mathbb{P}_{(X_i=k')}(X_{i+1}=k)$ *:*

En s'appuyant sur la figure, on peut écrire directement :

$$\begin{cases}
\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_{i+1}=1) & = \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=3) = q_0 r \\
\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_{i+1}=2) & = \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1) = q_0 r^2 \\
\mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_{i+1}=3) & = \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=2) = q_0
\end{cases}$$

De même :

$$\begin{cases}
\mathbb{P}_{(X_i=3)}(X_{i+1}=1) & = \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=2) = q_0 \\
\mathbb{P}_{(X_i=3)}(X_{i+1}=2) & = \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=3) = q_0 r \\
\mathbb{P}_{(X_i=3)}(X_{i+1}=3) & = \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1) = q_0 r^2
\end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\text{la matrice } A \text{ a pour coefficient } a_{k,k'} = \mathbb{P}_{(X_i=k')}(X_{i+1}=k)}$

c) On en déduit que $Y_{i+1} = AY_i$ par l'application extrêmement classique de la formule des probabilités totales en utilisant $\{(X_i = k'), 1 \leq k' \leq 3\}$ comme système complet d'événement.

En effet :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{i+1}=1) &= \sum_{k'=1}^{3} \mathbb{P}((X_{i+1}=1)\cap(X_i=k')) \\ &= \mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1}=1)\mathbb{P}(X_i=1) + \mathbb{P}_{(X_i=2)}(X_{i+1}=1)\mathbb{P}(X_i=2) \\ &+ \mathbb{P}_{(X_i=3)}(X_{i+1}=1)\mathbb{P}(X_i=3)\end{aligned}$$

D'après la question précédente, on obtient donc :

$$\mathbb{P}(X_{i+1}=1) = q_0r^2\mathbb{P}(X_i=1) + q_0r\mathbb{P}(X_i=2) + q_0\mathbb{P}(X_i=3)$$

et par le même raisonnement (F.P.T.) on obtient successivement :

$$\mathbb{P}(X_{i+1}=2) = q_0\mathbb{P}(X_i=1) + q_0r^2\mathbb{P}(X_i=2) + q_0r\mathbb{P}(X_i=3)$$

et

$$\mathbb{P}(X_{i+1}=3) = q_0r\mathbb{P}(X_i=1) + q_0\mathbb{P}(X_i=2) + q_0r^2\mathbb{P}(X_i=3)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } i \geq 1, \text{ on a } Y_{i+1} = AY_i}$

On montre ensuite par une récurrence qu'il FAUT écrire que

$$\forall i \geq 1,\ Y_i = A^{i-1}Y_1$$

i. Pour $i=1$, on a bien $Y_i = Y_1 = A^0Y_1$ car $A^0 = I_3$.
ii. On suppose que $Y_i = A^{i-1}Y_1$ pour i fixé ($i \geq 1$)
iii. Alors, d'après ce qui précède, $Y_{i+1} = AY_i = A\cdot A^{i-1}Y_1 = A^iY_i$
iv. ***Conclusion*** : $\boxed{Y_i = A^{i-1}Y_1,\ \forall i \in \mathbb{N}^*}$

Montrer que $Y_i = A^iU$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ revient à montrer que $Y_1 = AU$ où $U = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$...

Or la matrice Y_1 est donnée par la loi de la variable aléatoire X_1 égale au numéro obtenu à l'issue du premier tirage en partant de I_0, donc

$$Y_1 = \begin{pmatrix}\mathbb{P}(X=1)\\\mathbb{P}(X=2)\\\mathbb{P}(X=3)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}q_0\\rq_0\\r^2q_0\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \text{ (d'après C/1.a))}$$

✐ *On pouvait aussi dire que la loi de X_1 est égale à la loi de X_{i+1} sachant $(X_i=3)$*

On vient d'obtenir que $Y_1 = AU$ et donc $\boxed{Y_i = A^iU,\ \forall i \geq 0}$

Lu dans le rapport de jury : « *Parmi les étudiants qui abordent C/, une minorité non négligeable n'arrive pas à montrer la relation, pourtant classique $Y_{i+1} = AY_i$. L'initialisation de la récurrence* ***est très rarement*** *faite.* »

② On étudie maintenant le comportement de ce modèle lorsque le nombre de lancers devient très grand.

a) *Exprimons A en fonction de q_0, r, I, J et J^2 :* $J^2 = \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$

Conclusion : $\boxed{A = q_0\left(r^2I + J + rJ^2\right)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Incontestablement la question la plus réussie du problème.* »

b) *Montrons que les valeurs propres de J sont 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2 :*

– ***Méthode 1 : « classique »*** $\lambda \in \mathrm{Sp}(J) \Leftrightarrow \mathrm{rg}(J - \lambda I_3) < 3$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(J-\lambda I_3) &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^2 & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ L_3 \leftarrow L_2 \end{matrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1-\lambda^3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda^2 L_2 \end{matrix}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\lambda \text{ valeur propre de } J \text{ si et seulement si } \lambda^3 = 1}$

Inutile de résoudre l'équation $\lambda^3 = 1$ car il est clair que 1 est une solution. De plus
$$j^3 = \left(e^{2i\pi/3}\right)^3 = e^{2i\pi} = 1$$
donc $\lambda = j$ est également solution de cette équation.
Ensuite, on peut dire que $(j^2)^3 = (j^3)^2 = 1$, ce qui prouve que $\lambda = j^2$ est également solution de $\lambda^3 = 1$ mais on peut également dire que si j est racine du polynôme à coefficients réels $X^3 - 1$, alors c'est aussi le cas de son conjugé, à savoir $\overline{j} = j^2$...
Au bout du compte, 1, j et j^2 sont trois racines de $X^3 - 1$ qui ne peut admettre plus de trois racines.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \{1, j, j^2\}}$

– ***Méthode 2 :*** Sans doute la plus efficace...
On note que 1 est une valeur propre évidente puisque sur chaque ligne la somme des coefficients vaut toujours 1. Ou encore :
$$J\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$
On « remarque »(c'est là que ça n'a rien de si évident...) que :
$$J\begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix} = j \times \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix} \text{ et } J\begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix} = j^2 \times \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$$
On a alors prouvé que 1, j et j^2 sont trois valeurs propres distinctes de J. Il faut alors noter que J est une matrice carrée d'ordre 3 et qu'elle ne peut donc avoir plus de trois valeurs propres distinctes. On a donc obtenu toutes ses valeurs propres...
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(J) = \{1, j, j^2\}}$

– ***Méthode 3 :*** On nous donne les valeurs propres. On peut donc se contenter de vérifier que pour chaque λ donné, on a $\mathrm{rg}(J - \lambda I_3) < 3$. Il n'y a pas de difficulté particulière mais ça ne va pas si vite que ça ici...

Lu dans le rapport de jury : « *Les racines n-ièmes de l'unité n'étant pas au programme, on attendait une preuve rigoureuse. De plus, cela fait du plus mauvais effet quant un candidat parle de racines cubique de l'unité sans réussir à faire la question suivante ! Certaines candidats sont passés pr le calcul des rangs de $J - I$, $J - jI$ et $J - j^2 I$* »

c) *Vérifions les relations suivantes : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $\overline{j} = j^2$:*

$$\mathrm{j}^3 = \left(e^{i2\pi/3}\right)^3 = e^{i2\pi} = 1$$

puis

$$1 + j + j^2 = \frac{1 - j^3}{1 - j} = 0$$

enfin,

$$\overline{j} = e^{-i2\pi/3} = e^{i2\pi} e^{-i2\pi/3} = e^{4i\pi/3} = \left(e^{i2\pi/3}\right)^2 = j^2$$

✐ On pouvait aussi dire (TRES utile) que j est un complexe de module 1. Donc

$$j\overline{j} = 1 \text{ et donc } \boxed{\overline{j} = \frac{1}{j}}$$

Dès lors :

$$j^3 = j \times j^2 = 1 \Leftrightarrow j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$$

d) *Trouvons une matrice inversible complexe P dont la première ligne est composée de 1, telle que :*

$$J = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

✐ Tout dépend de la méthode utilisée en b)... Si on a utilisé la méthode 2 c'est fini car on a déjà obtenu un vecteur propre associé à chaque valeur propre. Or, lorsqu'il y a autant de valeurs propres que l'ordre de la matrice, la dimension de chacun des espaces propres vaut 1. On a donc déja obtenu une base de vecteurs propres (dont la première coordonnée vaut 1 dans chaque cas).
Cela étant, ça ne concerne que très peu de candidats et je vais décrire la méthode « classique » :
Appelons $U_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \\ 0 & 0 & 1 - \lambda^3 \end{pmatrix}$ la matrice obtenue après réduction de Gauss de $J - \lambda I_3$

– $X \in \mathbb{E}_1 \Leftrightarrow (J - I)X = 0 \Leftrightarrow U_1 X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y & = 0 \\ y - z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z, \forall z \in \mathbb{C}$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}}$

– $X \in \mathbb{E}_j \Leftrightarrow (J - jI)X = 0 \Leftrightarrow U_j X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - jy & = 0 \\ y - jz & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = jz \\ x & = jy = j^2 z \end{cases}, \forall z \in \mathbb{C}$

Conclusion : $\boxed{E_j = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} j^2 \\ j \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}\right\}}$

✐ **Attention :** On n'oublie pas de multiplier par j pour obtenir des vecteurs de base dont la première coordonnée vaut 1.

– $X \in \mathbb{E}_{j^2} \Leftrightarrow (J - j^2 I)X = 0 \Leftrightarrow U_{j^2}X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - j^2 y & = 0 \\ y - j^2 z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = j^2 z \\ x & = j^2 y = j^4 z = jz \end{cases}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Conclusion : $\boxed{E_{j^2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} j \\ j^2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}\right\}}$

✐ **Attention :** On n'oublie pas de multiplier par j^2 pour obtenir des vecteurs de base dont la première coordonnée vaut 1.

La juxtaposition des bases de chacun des sous-espaces propres forme une famille libre dont le cardinal est égale à la dimension de l'espace $\mathbb{C}^3$. On a donc obtenu une base de vecteurs propres dont la matrice de passage P depuis la base canonique est :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} \text{ (inversible puisque matrice d'une base)}$$

Conclusion : $\boxed{J = PDP^{-1}}$

Lu dans le rapport de jury : « *L'inversibilité n'est pas toujours justifiée.* »

e) On note $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. *Calculons $\overline{P} \times P$ pour en déduire l'expression de P^{-1} :*
$\overline{P}P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j^2 & j \\ 1 & j & j^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$ en utilisant $jj^2 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$
On en déduit l'inverse de P , car $\left(\frac{1}{3}\overline{P}\right) P = I_3$

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{3}\overline{P}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Quand P est juste, cette question est bien traitée* »

f) *Déterminons alors une matrice complexe* $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$ *telle que* $A = P\Delta P^{-1}$:

$A = q_0\left(r^2 I + J + rJ^2\right)$
$I = PIP^{-1}$, $J = PDP^{-1}$, $J^2 = PD^2P^{-1}$
D'où

$$A = P\left(q_0 r^2 I + q_0 D + q_0 r D^2\right) P^{-1}$$

$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$, $D^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j^2 & 0 \\ 0 & 0 & j \end{pmatrix}$ car $j^4 = j$

$A = P\Delta P^{-1}$ avec $\Delta = q_0 r^2 I + q_0 D + q_0 r D^2 = q_0 \begin{pmatrix} r^2+1+r & 0 & 0 \\ 0 & r^2+j+rj^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2+j^2+rj \end{pmatrix}$

$1+r+r^2 = \dfrac{1-r^3}{1-r} = \dfrac{1-q}{1-q^{1/3}}$ d'où $q_0\left(r^2+1+r\right) = 1$ puisque $q_0 = \dfrac{1-q^{1/3}}{1-q}$

$$\boxed{A = P\Delta P^{-1} \text{ avec } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } \delta_2 = q_0\left(r^2+j+rj^2\right) \text{ et } \delta_3 = q_0\left(r^2+j^2+rj\right)}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Assez bien dans les quelques copies qui abordent cette question. Le coefficient 1 de la première ligne est rarement justifié.* »

g) *Vérifions que $\delta_2 = \overline{\delta_3}$:*
$\overline{\delta_2} = q_0\left(r^2+\overline{j}+r\overline{j^2}\right) = q_0\left(r^2+j^2+rj\right) = \delta_3$

Montrons que $(r^2+j+j^2r)(r^2+j^2+rj) = (1-r)(1-r^3)$:

$\left(r^2+j+rj^2\right)_0\left(r^2+j^2+rj\right) = r^4+r^2j^2+r^3j+r^2j+j^3+rj^2+r^3j^2+rj^4+r^2j^3$
$\left(r^2+j+rj^2\right)_0\left(r^2+j^2+rj\right) = r^4+r^3\left(j+j^2\right)+r^2\left(j+j^2+1\right)+r\left(j^2+j\right)+1 = r^4-r^3-r+1$
$(1-r)\left(1-r^3\right) = 1-r-r^3+r^4$

$$\boxed{\delta_2\delta_3 = q_0^2\,(1-r)\left(1-r^3\right)}$$

Déduisons-en que $|\delta_2| < 1$, $|\delta_3| < 1$:

$\delta_2\delta_3 = \delta_2\overline{\delta_2} = |\delta_2|^2 = q_0^2\,(1-r)\left(1-r^3\right) = \dfrac{(1-r)^3}{1-r^3}$ car $q_0 = \dfrac{1-q^{1/3}}{1-q} = \dfrac{1-r}{1-r^3}$
$\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3} < 1 \Longleftrightarrow 1-3r+3r^2-r^3 < 1-r^3$ (car $\mathrm{r}^3 < 1$)
$\dfrac{(1-r)^3}{1-r^3} < 1 \Longleftrightarrow 3r(r-1) < 0$ ce qui est vrai car $r \in]0,1[$
d'où $\boxed{|\delta_2| < 1 \text{ et donc } |\delta_3| < 1 \text{ puisque } \delta_3 = \overline{\delta_2}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Les deux premières égalités sont traitées par un nombre appréciable de candidats, certainement en fin d'épreuve, vu la présentation...* »

h) *En déduire $\lim\limits_{i\to+\infty} \mathbb{P}(X_i = k)$ pour tout $k \in [\![1,3]\!]$:*
$A^n = P\Delta^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\delta_2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (\delta_3)^n \end{pmatrix} P^{-1}$
$\lim \Delta^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ car $|\delta_2| = |\delta_3| < 1$
les coefficients de A^n étant obtenus par combinaison linéaires des coefficients de Δ^n , on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \lim_{n\to\infty} A^n \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = P \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} P^{-1} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j&j^2\\1&j^2&j\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix}1&1&1\\1&j^2&j\\1&j&j^2\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\forall k \in \{1,2,3\},\ \lim P(X=k) = \frac{1}{3}}$$

Au bout d'un grand nombre de lancers, tous les numéros gagnants deviennent équiprobables.

Partie D : Autre modèle de parties enchaînées

La roulette est lancée l fois ($l \geq 2$). La position initiale avant le premier lancer est en I_0. La seconde fois, la roulette est lancée depuis la position exacte atteinte à la fin du premier mouvement, et ainsi de suite (cette situation diffère donc de celle étudiée dans la parti C). Pour tout entier i entre 1 et l, on désigne par θ_i l'angle total décrit par I_0 pendant les i premiers lancers. On note N_l la variable aléatoire égale au nombre de tours complets effectués par I_0 au cours des l lancers.

Lu dans le rapport de jury : « *Cette partie est rarement abordée, peut-être par manque de temps. Des ébauches de solutions pour la question 1. : quelques rares bonnes solutions. Quelques candidats trouvent la valeur de r* »

① On suppose l grand. Dans l'application numérique c qui suit on prendra $l = 100$. *Quelle loi est-il possible d'utiliser pour obtenir des valeurs approchées d'événements relatifs à θ_l ?*

Notons T_i l'angle effectué par la roue au i-ème lancer. Alors :

$$\theta_l = \sum_{i=1}^{l} T_i$$

$(T_i)_{i\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $1/\alpha$ admettant une espérance $\mu = \alpha$ et un écart-type $\sigma = \alpha$.

Nous sommes dans les conditions d'application du théorème central limite (1ère forme).
Rédigeons au plus près du cours : Pour ça posons $M_l = \dfrac{T_1 + T_2 + \cdots + T_l}{l} = \dfrac{\theta_l}{l}$.
Alors le théorème central limite assure que pour l grand, on peut approcher la loi de

$$M_l^* = \frac{M_l - \mu}{\sigma/\sqrt{l}} \text{ par la loi } \mathcal{N}(0,1)$$

Autrement dit, on approche la loi de

$$\frac{\theta/l-\alpha}{\alpha/\sqrt{l}} = \frac{\theta_l - l\alpha}{\alpha\sqrt{l}} \text{ par la loi normale centrée réduite}$$

Considérons maintenant que l est assez grand pour que $Z = \dfrac{\theta_l - l\alpha}{\alpha\sqrt{l}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

On a alors la relation :

$$\theta_l = \alpha\sqrt{l}\cdot Z + l\alpha$$

Or, on sait que si $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, et $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, alors $aZ+b \hookrightarrow \mathcal{N}(b,|a|)$

Conclusion : $\boxed{\theta_l \hookrightarrow \mathcal{N}(l\alpha, \alpha\sqrt{l})}$

L'espérance et la variance de la loi normale étant connue, on peut également conclure

$$\boxed{\mathbb{E}(\theta) = l\alpha \text{ et } \mathbb{V}(\theta) = l\alpha}$$

② On donne dans l'énoncé le graphe de la fonction de répartition ici appelée G de la loi normale centrée réduite. *Déterminons graphiquement une valeur approchée à à10^{-1} près de $r > 0$ tel que $G(r) - G(-r) = 0.95$:*

C'est une question de cours... On commence par rappeler que $G(r) + G(-r) = 1$ donc :

$$G(r) - G(-r) = 2G(r) - 1 = 0.95 \Leftrightarrow G(r) = \frac{1.95}{2} = 0.975$$

Graphiquement, on trouve :

$$\boxed{r = 2.0}$$

En déduire, en utilisant l'approximation précédente, un intervalle $[a,b]$ tel que $\mathbb{P}(a \leq \theta_l \leq b) = 0.95$ (on donnera a et b en fonction de r, l et α) :

On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{P}(a \leq \theta_l \leq b) = 0.95$

Autrement dit :

$$\mathbb{P}\left(\frac{a-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}} \leq \frac{\theta - l\alpha}{\lambda\sqrt{l}} \leq \frac{b-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{a-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}} \leq \theta_l^* \leq \frac{b-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}}\right) = 0.95$$

Soit aussi :

$$G\left(\frac{b-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}}\right) - G\left(\frac{a-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}}\right) = 0.95$$

D'après ce qui précède, il suffit de prendre :

$$\frac{a-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}} = -r \text{ et } \frac{b-l\alpha}{\alpha\sqrt{l}} = r$$

Conclusion : $\boxed{a = l\alpha - r\alpha\sqrt{l} \text{ et } b = l\alpha + r\alpha\sqrt{l}}$

ou encore, puisque on a obtenu $r = 0$:

Conclusion : $\boxed{a = l\alpha - 2\alpha\sqrt{l} \text{ et } b = l\alpha + 2\alpha\sqrt{l}}$

③ *Application numérique :* pour $\alpha = 10\pi$ et $l = 100$, donner des entiers naturels n_1 et n_2 tels que $\mathbb{P}(n_1 \leq N_l \leq n_2) \geq 0.95$.

On cherche n_1 et n_2 tels que :

$$\mathbb{P}(2n_1\pi \leq \theta_l < 2n_2\pi + 2\pi) = 0.95$$

En appliquant le résultat de la question qui précède, on obtient :

$$a = 2n_1\pi = l\alpha - r\alpha\sqrt{l} \text{ et } b = 2n_2\pi + 2\pi = l\alpha + 2\alpha\sqrt{l}$$

soit

$$2n_1\pi = l\alpha - 2\alpha\sqrt{l} = 1000\pi - 2.0 \times 100\pi = 800\pi$$

et

$$2n_2\pi + 2\pi = l\alpha + 2\alpha\sqrt{l} = 1000\pi + 2.0 \times 100\pi = 1200\pi$$

Conclusion : $\boxed{n_1 = 400 \text{ et } n_2 = 599}$

✐ On peut vérifier ce résultat grâce à nos fonctions Python (ce n'était pas demandé mais c'est une question fréquente) :

```
def simultTheta_L(alpha,L):
    Theta_L = 0
    for k in range(L):
       Theta_L += simulTheta(alpha)
    return Theta_L

def IntervConfiance(alpha,L,m):
    s = 0
    for k in range(m):
       theta = simultTheta_L(alpha,L)
       N = int(theta/(2*pi))
       if N<400 or N>599:
          s += 1
    return s/m
```

Ainsi, `IntervConfiance(10*pi,100,1000)` retourne : `0.052`...