Var discrètes, à densité et algèbre linéaire

L'usage de la calculatrice est interdite pour cette épreuve. *Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.*
*les parties **B**, **C** et **D** sont indépendantes mais utilisent des résultats et les notations de la partie **A**.*

Problème :

On considère une roulette circulaire , divisée en $s \geq 2$ secteurs angulaires et pouvant tourner autour d'un axe fixé en son centre O. Chaque secteur porte un numéro de 1 à s, ceux-ci étant ordonnés suivant le sens trigonométrique inverse. $\mathcal{C}$ désignant le cercle délimitant le bord de la roulette, on note I_k le point de $\mathcal{C}$ situé à l'extrémité du rayon séparant le secteur k du secteur $k+1$ pour $1 \leq k \leq s-1$, et I_0 le point correspondant entre les secteurs s et 1. Les figures 1, 2 et 3 illustrent ces définitions pour le cas $s = 9$.

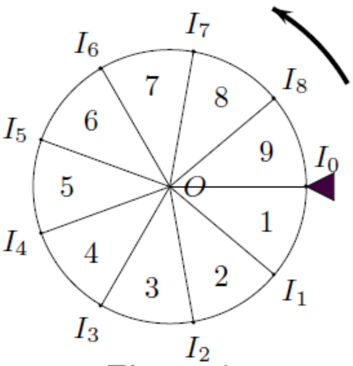


Figure 1
Position initiale en I_0

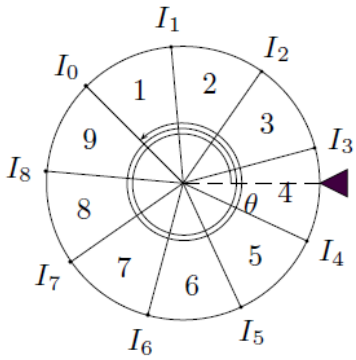


Figure 2
Position finale (départ en I_0).

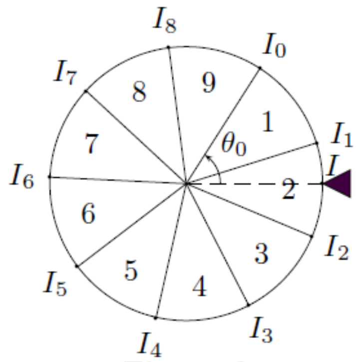


Figure 3
Autre position initiale

Un repère fixe triangulaire permet de désigner un unique secteur de la roulette. A l'instant initial, le repère indique un point I de la roulette de sorte que $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OI_0}}) = \theta_0$ ($\theta_0 = 0$ et $I = I_0$ dans la **figure 1**, θ_0 quelconque dans la **figure 3**). La roulette est lancée dans le sens trigonométrique. Une fois sont mouvement terminé, le repère désigne un secteur dont le numéro k est le numéro gagnant (**figure 2**). On admettra ici que la probabilité que le repère désigne un rayon séparant deux secteurs est nulle, ce qui est cohérent avec le modèle qui suit.
On note X la variable aléatoire égale au numéro gagnant, N la variable aléatoire égale au nombre de tours complets effectués par la roulette avant de s'arrêter et θ la variable aléatoire égale à l'angle total en radians dont a tourné le point I_0 autour de l'axe au cours du mouvement, en tenant compte du nombre de tours complets. Dans l'exemple de la figure 2, on a $\theta = 4\pi + 3\pi/4$: cela signifie que la roue a fait $N = 2$ tours complets plus trois huitièmes de tours avant de s'arrêter, et le numéro gagnant est alors $X = 4$. On supposera dans tout la suite que θ suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{\alpha}$ où $\alpha > 0$ est un réel fixé.

Partie A : Détermination des lois de X et de N

① On commence par une étude de la loi de θ.

a) Donner une densité f de la loi exponentielle suivie par θ.
b) Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire θ en fonction de α.
c) Calculer la fonction de répartition F de θ.
d) Justifier le choix d'une loi exponentielle pour modéliser la variable aléatoire θ en précisant le sens qui pourrait être donné à α. Écrire une fonction Python `simulTheta(alpha)` de paramètre le réel $\alpha > 0$ et qui retourne une valeur prise par la variable aléatoire θ.

② On s'intéresse maintenant à la loi de N.

a) Pour $n \in \mathbb{N}$, à quelles valeurs de θ correspond l'événement $(N = n)$? En déduire que N suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\alpha}}$. On pose $q = 1 - p$.
b) Écrire une fonction Python `simulN(alpha)` qui, à l'aide de la fonction écrite dans la question précédente, modélise une réalisation de la variable aléatoire N.
c) Écrire une fonction `estimeEspN(alpha,m)` où m est un entier naturel supposé grand, qui permet d'estimer l'espérance de la variable aléatoire N (on justifiera son calcul).
d) Calculer l'espérance et la variance de N en fonction de q. Valider votre réponse grâce à la fonction Python `estimEspN` en prenant successivement $\alpha = 3\pi$, 5π et 10π

③ Nous déterminons maintenant la loi conjointe du couple (X, N). Soient k en entier entre 1 et s et $n \in \mathbb{N}$. On suppose ici qu'à l'instant initial, le repère désigne le point I_0, comme sur la **figure** 1.

a) Montrer que la probabilité de l'événement conjoint $((X = k) \cap (N = n))$ est
$$\mathbb{P}(X = k, N = n) = q^n q^{\frac{k}{s}} \left(q^{-\frac{1}{s}} - 1\right)$$
b) Montrer que pour k fixé, la série de terme général $u_n = \mathbb{P}((X = k) \cap (N = n))$ est convergente. En déduire que la probabilité de l'événement $(X = k)$ est
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{q^{\frac{k}{s}} \left(q^{-\frac{1}{s}} - 1\right)}{1 - q}$$
c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{s} \mathbb{P}(X = k) = 1$.
d) Écrire une fonction Python `simulX(alpha,s)` qui retourne une valeur entière comprise entre 1 et s simulant le numéro du secteur sur lequel s'arrête le repère. En déduire une fonction `freqX(alpha,s,m)` dont le paramètre est un entier naturel supposé grand et qui renvoie la liste de longueur s des fréquences de réalisation des événements $(X = k)$ pour $k \in [\![1, s]\!]$ au cours de m simulations indépendantes de la variable aléatoire X.
e) Montrer que les variables aléatoires X et N sont indépendantes.

Partie B : Numéros gagnants équiprobables

Nous allons voir ici deux méthodes simples pour tenter de rendre les numéros équiprobables.

① Dans cette question, on examine l'idée intuitive suivante : si la roulette est lancée suffisamment fort pour faire un très grand nombre de tours, la position initiale n'a presque plus d'influence sur le résultat.

a) Calculer la limite $\mathbb{P}(X = k)$ quand α tend vers $+\infty$.
b) Conclure.
c) Valider votre réponse grâce à la fonction `freqX()` écrite en A/3.d) avec $s = 9$

② Dans cette question et la suivante, nous examinons la possibilité de dessiner sur la roulette des secteurs angulaires non réguliers dans le cas particulier $s = 2$. On suppose donc la roulette divisée en deux secteurs : le secteur 1 est une portion de disque d'angle $\pi - \omega$ (où $\omega \in]0, \pi[$) et le secteur 2 la portion restante. La position initiale est au point I_0 (voir **figure 4** ci-dessous)

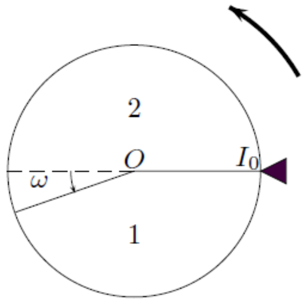


Figure 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on définit $ch(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

a) Montrer que ch et sh sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout x réel : $ch'(x) = sh(x)$ et $sh'(x) = ch(x)$. Que vaut $ch^2(x) - sh^2(x)$?
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{P}(X = 1, N = n)$ et $\mathbb{P}(X = 2, N = n)$ en fonction de n, α et ω (on pensera à utiliser F).
c) En déduire que $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2)$ si, et seulement si

$$\omega = \alpha \ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right) \quad (*)$$

d) On suppose que ω est fixé par la relation précédente. X et N sont-elles indépendantes ?

③ On cherche à déterminer si la relation $(*)$ est bien compatible avec la condition $\omega \in]0, \pi[$. Pour cela, on pose :

$$\varphi(\alpha) = \alpha \ln\left(ch\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)\right)$$

a) Montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et calculer φ', qu'on exprimera à l'aide de la fonction

$$\psi : x \longmapsto x\frac{sh(x)}{ch(x)} - \ln(ch(x))$$

b) Montrer que $\psi(x) > 0$ pour tout $x > 0$ et en déduire que φ est décroissante sur $]0, +\infty[$ (on pourra calculer ψ').
c) Montrer que $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \varphi(\alpha) = \pi$ et en déduire que $\varphi(\alpha)$ est dans l'intervalle $]0, \pi[$. Conclure.
d) Montrer que lorsque x tend vers 0, $ch(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2} + \circ(x^2)$ et en déduire $\displaystyle\lim_{\alpha \to +\infty} \varphi(\alpha)$. Comment interpréter ce résultat en faisant référence à la question B.1 ?

Partie C : Parties enchaînées

On supposera dans toute cette partie que $s = 3$ (voir **figure** 5). La roulette est maintenant lancée plusieurs fois de suite, la position initiale avant le premier lancer état en I_0. A l'issue de chaque mouvement :
– Si le numéro gagnant est 1, la roulette est relancée depuis la position I_1.
– Si le numéro gagnant est 2, la roulette est relancée depuis la position I_2.
– Si le numéro gagnant est 3, la roulette est relancée depuis la position I_3.

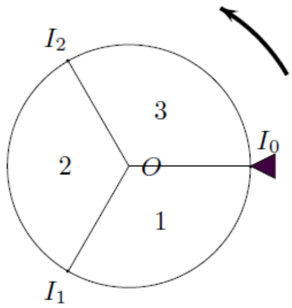


Figure 5

Pour le lancer numéroté $i \geq 1$, on notera X_i le numéro gagnant et Y_i le vecteur $Y_i = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_i = 1) \\ \mathbb{P}(X_i = 2) \\ \mathbb{P}(X_i = 3) \end{pmatrix}$

On utilisera les notations suivantes (q étant défini dans la partie A) :

$$U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ q_0 = \frac{1 - q^{1/3}}{1 - q},\ r = q^{1/3},\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

① Soit $i \geq 1$. On cherche à obtenir une relation de récurrence entre Y_{i+1} et Y_i.

a) Pour $1 \leq k \leq 3$, calculer $\mathbb{P}_{(X_i=1)}(X_{i+1} = k)$.

b) Montrer ensuite que la matrice $A = q_0 \begin{pmatrix} r^2 & r & 1 \\ 1 & r^2 & r \\ r & 1 & r^2 \end{pmatrix}$ contient à l'intersection de la ligne k et de la colonne k' la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X_i=k')}(X_{i+1} = k)$.

c) En déduire $Y_{i+1} = AY_i$ puis l'expression de Y_i en fonction de A et de U.

② On étudie maintenant le comportement de ce modèle lorsque le nombre de lancers devient très grand.

a) Exprimer A en fonction de q_0, r, I, J et J^2.

b) Montrer que les valeurs propres de J sont 1, $j = e^{2i\pi/3}$ et j^2.

c) Vérifier les relations suivantes : $j^3 = 1$, $1 + j + j^2 = 0$ et $\overline{j} = j^2$.

d) Trouver une matrice inversible complexe P dont la première ligne est composée de 1, telle que

$$J = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & j & 0 \\ 0 & 0 & j^2 \end{pmatrix}$$

e) On note $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P, c'est-à-dire la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P. Calculer $\overline{P} \times P$ et en déduire l'expression de P^{-1}.

f) Déterminer alors une matrice complexe $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 \end{pmatrix}$ telle que $A = P\Delta P^{-1}$.

g) Vérifier que $\delta_2 = \overline{\delta_3}$. Montrer que $(r^2 + j + j^2 r)(r^2 + j^2 + rj) = (1-r)(1-r^3)$.
En déduire que $|\delta_2| < 1$, $|\delta_3| < 1$.

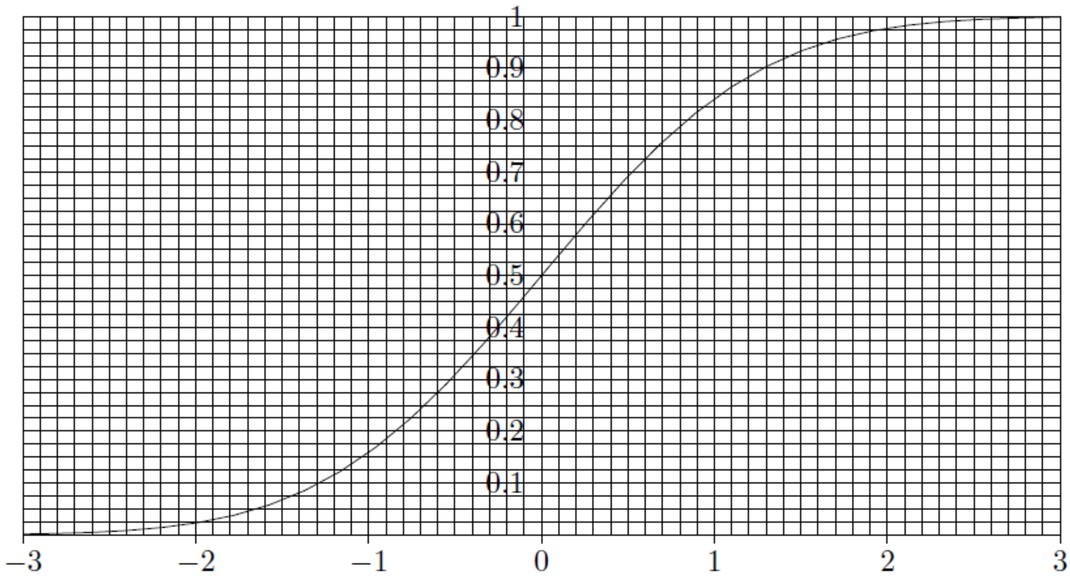
h) En déduire $\underset{i\to+\infty}{lim} \mathbb{P}(X_i = k)$ pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$.

Partie D : Autre modèle de parties enchaînées

La roulette est lancée l fois ($l \geq 2$). La position initiale avant le premier lancer est en I_0. La seconde fois, la roulette est lancée depuis la position exacte atteinte à la fin du premier mouvement, et ainsi de suite (cette situation diffère donc de celle étudiée dans la parti C). Pour tout entier i entre 1 et l, on désigne par θ_i l'angle total décrit par I_0 pendant les i premiers lancers. On note N_l la variable aléatoire égale au nombre de tours complets effectués par I_0 au cours des l lancers.

① On suppose l grand. Dans l'application numérique c qui suit on prendra $l = 100$.
Quelle loi est-il possible d'utiliser pour obtenir des valeurs approchées d'événements relatifs à θ_l ? On donnera la variance et l'espérance de cette loi.

② On donne ci-dessous le graphe de la fonction de répartition G de la loi normale centrée réduite. Déterminer graphiquement une valeur approchée à à10^{-1} près de $r > 0$ tel que $G(r) - G(-r) = 0.95$.
En déduire, en utilisant l'approximation précédente, un intervalle $[a, b]$ tel que $\mathbb{P}(a \leq \theta_l \leq b) = 0.95$ (on donnera a et b en fonction de r, l et α).



③ *Application numérique :* pour $\alpha = 10\pi$ et $l = 100$, donner des entiers naturels n_1 et n_2 tels que $\mathbb{P}(n_1 \leq N_l \leq n_2) \geq 0.95$.