MATHEMATIQUES
Var discrètes et algèbre linéaire

Problème :

Préliminaire : Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans I_n

Rappel de notations : Pour tout entier naturel n, I_n désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$ et I_n^* l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leq k \leq n$.
Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose, pour tout réel t pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance. La fonction g_X est appelée fonction génératrice de la variable aléatoire X.

Pour tout $k \in I_n$, on note $a_k = \mathbb{P}(X = k)$ la probabilité que X prenne la valeur k.

① a) *Montrons que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?*
Si $X(\Omega) \subset I_n = [\![0, n]\!]$, alors $a_k = \mathbb{P}(X = k) = 0$, $\forall k > n$. D'où :
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$. Ce qui prouve que g_X est un polynôme de degré **au plus** n.
$g_X(1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X = k) = 1$ puisque $X(\Omega) \subset I_n = [\![0, n]\!]$.
Conclusion : $\boxed{g_X(1) = 1}$.

Lu dans le rapport de jury : « *[AgroB 2011] Certains candidats conservent des séries et parlent de polynômes de degré infini. On voit des formules mathématiques fausses, par exemple : pour tout k de I_n, pour tout x $g_x(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$, quelques résultats fantaisistes, par exemple : $g_X(1) = a_0 + a_1$ ou $g_X(1) = \dfrac{n+1}{2}(a_0 + a_n)$* ».

b) On souhaite montrer que si g_X est donnée, alors la loi de X est entièrement connue :

i. Pour tout $k \in I_n$ fixé, *montrons que pour tout entier naturel i, la dérivée i-ième du monôme X^k vaut :*

$$(X^k)^{(i)} = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i} & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

k étant fixé, on commence par noter que si $i > k$, l'ordre de la dérivée est supérieur au degré du monôme X^k et donc $(X^k)^{(i)} = 0$.

On peut alors montrer par récurrence sur i que $\forall i \leq k$, $(X^k)^{(i)} = \dfrac{k!}{(k-i)!} X^{k-i}$: $(\mathcal{R}_i)$.

En effet :

- Pour $i = 0$: $(X^k)^{(0)} = X^k = \dfrac{k!}{k!}X^{k-0}$. La relation $(\mathcal{R}_0)$ est donc vraie au rang 0.
- On suppose $(\mathcal{R}_i)$ vraie pour i fixé, $0 \leq i < k$.
- Montrons que $(\mathcal{R}_{i+1})$ est vraie :
$$(X^k)^{(i+1)} = \left((X^k)^{(i)}\right)' = \left(\frac{k!}{(k-i)!}X^{k-i}\right)' = \frac{k!}{(k-i)!}(k-i)X^{k-i-1}$$
Soit $(X^k)^{(i+1)} = \dfrac{k!}{(k-i+1)!}X^{k-(i+1)}$. Ce qui prouve que $\mathcal{R}_{i+1}$ est vraie.
- ***Conclusion*** : $\boxed{\mathcal{R}_i \text{ est vraie pour tout } i \leq k}$.

Lu dans le rapport de jury : « *[AgroB-2011] Bien traitée dans 50% des copies* ».

ii. *Exprimons $g_X^{(i)}(t)$ sous forme d'une somme qui dépend des a_k, t et i :*

Nous savons que pour tout t réel, $g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k t^k$.

Donc par linéarité de la dérivation :
$$g_X^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k (t^k)^{(i)} = \sum_{k=0}^{i-1} a_k (t^k)^{(i)} + \sum_{k=i}^{n} a_k (t^k)^{(i)} = \sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k!}{(k-i)!}t^{k-i}$$
On en déduit que $g_X^{(i)}(0) = \displaystyle\sum_{k=i}^{n} a_k \frac{k!}{(k-i)!}0^{k-i} = a_i \cdot i!$

iii. Il suffit de diviser l'égalité précédente par $i!$ pour obtenir l'expression de $a_i = \dfrac{g_X^{(i)}(0)}{i!}$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in I_n,\ \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{g_X^{(k)}(0)}{k!}}$.

c) g_X est une fonction polynôme. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et en particulier dérivable deux fois sur $\mathbb{R}$. Un calcul immédiat donne :
$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X'(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k k t^{k-1}$$
soit
$$\boxed{g_X'(1) = \sum_{k=1}^{n} a_k k = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X)}$$
De même :
$$g_X''(t) = \sum_{k=2}^{n} a_k k(k-1)t^{k-2} \text{ et donc } g_X''(1) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1))$$
D'après le théorème de transfert.

Dès lors, d'après le théorème de Koënig-Huygens et par linéarité de l'intégrale :
$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}^2(X)$$
Conclusion : $\boxed{\mathbb{V}(X) = g_X''(1) + g_X'(1) - (g_X'(1))^2}$

② Soient (m_1, m_2) deux entiers naturels et (Z_1, Z_2) deux variables aléatoires réelles à valeurs respectivement dans I_{m_1} et I_{m_2}. On suppose que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.
En utilisant pour tout réel t l'expression $g_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$, montrons que :

$$g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t) \cdot g_{Z_2}(t)$$

Pour tout réel t, $E(t^{Z_1+Z_2}) = E(t^{Z_1}t^{Z_2}) = E(t^{Z_1})E(t^{Z_2})$ car les variables aléatoires Z_1 et Z_2 étant indépendantes, t^{Z_1} et t^{Z_2} sont indépendantes. On a bien :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t)}$$

Lu dans le rapport de jury : *« [Agro 2011] Beaucoup de candidats utilisent le résultat donné en début d'énoncé en justifiant son application par l'indépendance de X_1 et X_2 : peu d'entre eux pensent à en déduire l'indépendance de t^{X_1} et t^{X_2}.*
Quelques candidats justifient l'égalité $E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2})$ par la linéarité de l'espérance ! ! »

③ **Application :**

a) *Calculons la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$:*
Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors
$\forall t \in \mathbb{R},\ g_X(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} t^k = (pt+q)^n$. (On a posé $q = 1 - p$).

Lu dans le rapport de jury : *« [AgroB-2011] Résultat trouvé dans environ 60% des copies ».*

Retrouvons grâce à cette fonction l'espérance d'une loi binomiale de paramètres n et p :
Il suffit, d'après 1.c) de calculer $g'_X(t) = np(pt+q)^{n-1}$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) = g'_X(1) = np(p+q) = np}$

b) *Soit Y une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètres n' et p avec n' un entier naturel. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrons que $X+Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p :*
Si Y suit aussi une loi binomiale de paramètres n' et p, et si X et Y sont indépendantes, alors

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = (pt+q)^n(pt+q)^{n'} = (pt+q)^{n+n'}$$

On reconnaît la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n+n'$ et p.
La fonction génératrice caractérise une loi.

Conclusion : $\boxed{X+Y \text{ suit une loi binomiale de paramètres } n+n' \text{ et } p.}$

Lu dans le rapport de jury : *« [AgroB-2011] Résultat trouvé correctement dans 50% des candidats. Parmi les autres, quelques uns se contentent de dire que ce résultat est dans le cours ; d'autres essayent de le retrouver à partir de lois, généralement en finissant par affirmer le résultat ».*

Partie I : Simulation numérique

*On suppose avoir importé la fonction **`randint`** du module **`random`**.*
✐ Toute autre fonction est interdite dans cette partie, et cela inclus notamment `np.sum` et `np.mean`

① *Écrivons une fonction Python **`simulZ(n,k)`** d'argument l'entier n égale au nombre de stations distinctes du dépôt et un entier naturel k et qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire Z_k :*
Au départ le bus est en `S=n`.
Ensuite, à chaque instant, il atteint de façon équiprobable une station dont le numéro est compris entre 0 et S. Il suffit d'exécuter la fonction `S = rdm.randint(0,S)`. Cette station `S` devient son nouveau lieu de départ. Il suffit alors de modéliser k choix de stations successifs pour simuler la station atteinte au k-ième trajet en notant que `rdm.random(0,0)` retourne 0.
Une écriture possible est donc la suivante :

```
def simulZ(n,k):
    S = n # station initiale.
    for i in range(k): # pour chaque déplacement
       S = rdm.randint(0,S)
    return S
```

② *Écrivons une fonction **`freqZ(n,k,m)`** d'argument l'entier n associé au nombre de stations, un entier naturel k et un entier naturel non nul m (supposé grand) et qui renvoie la liste de longueur $n+1$ des fréquences de réalisation des événements $(Z_k = i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ au cours de m simulations indépendantes de la variable aléatoire Z_k :*

On commence par initialiser la liste demandée en exécutant `L = [0]*(n+1)`.
Ensuite on appelle m fois la fonction précédente. Si elle retourne le sommet `iS`, on augmente de 1 la fréquence de réalisation de l'événement $(Z_k = i)$ situé en `L[iS]`.
Une écriture possible est la suivante :

```
def freqZ(n,k,m):
    L = [0]*(n+1) # fréquence de chaque station possible
    for i in range(m):
       nS = simulZ(n,k)
       L[nS] += 1
    return [x/m for x in L]
```

A titre d'exemple, voici quelques fréquences retournées pour $n = 10$ stations :

```
freqZ(10,2,100) = [0.16, 0.22, 0.14, 0.09, 0.14, 0.1, 0.06, 0.05, 0.02, 0.02, 0]
freqZ(10,4,100) = [0.65, 0.23, 0.07, 0.03, 0.01, 0.0, 0.0, 0.01, 0, 0, 0]
freqZ(10,6,100) = [0.88, 0.08, 0.02, 0.02, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
```

On constate que plus k augmente, plus la probabilité de se retrouver au dépôt est grande $(S = 0)$ et plus la probabilité d'être proche de $S = n$ est faible.

③ *Écrivons une fonction* **moyEmpirZ(n,k,m)** *d'argument l'entier* n *associé au nombre de stations, un entier naturel* k *et un entier naturel non nul* m *(supposé grand) et qui renvoie la moyenne de* m *simulations indépendantes de la variable aléatoire* Z_k *:*

On rappelle que $\overline{x} = \sum_{i=0}^{p} \frac{n_i x_i}{n} = \sum_{i=0}^{p} f_i x_i$ où $f_i = \frac{n_i}{n}$ et $\sum_{i=0}^{p} n_i = n$.

Dès lors :

```
def moyEmpirZ(n,k,m):
    L = freqZ(n,k,m)
    moy = 0
    for j in range(n+1):
       moy += L[j]*j
    return moy
```

A titre d'exemples, si $n = 2$ stations entre le bus et son dépôt :

```
moyEmpirZ(2,0,1000) = 2.0
moyEmpirZ(2,1,1000) = 1.022
moyEmpirZ(2,2,1000) = 0.5059
moyEmpirZ(2,3,1000) = 0.2484
moyEmpirZ(2,4,1000) = 0.1291
```

✐ *Dans les parties II et III qui suivent, et dans ces parties uniquement, on se place dans le cas particulier où* $n = 2$*. Le bus dessert donc les stations* S_0*,* S_1 *et* S_2 *et se trouve initialement en* S_2*.*

Partie II : Étude théorique.

① a) *Déterminons les lois des variables aléatoires* Z_0*,* Z_1 *et* Z_2 *:*

Z_0 est la variable aléatoire certaine égale à 2. ***Conclusion*** : $\boxed{Z_0 = 2}$.

D'après l'énoncé, Z_1 suit la loi uniforme sur $[\![0, 2]\!]$. ***Conclusion*** : $\boxed{Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![0,2]\!]}}$

La loi de Z_2 n'est pas une loi usuelle.
$Z_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ car le bus peut être sur n'importe laquelle des stations.
Pour déterminer $\mathbb{P}(Z_2 = k)$, on applique la formule des probabilités totales en utilisant le système complet d'événements : $\{(Z_1 = 0), (Z_1 = 1), (Z_1 = 2)\}$. On obtient :

$$\mathbb{P}(Z_2 = k) = \mathbb{P}(Z_2 = k, Z_1 = 0) + \mathbb{P}(Z_2 = k, Z_1 = 1) + \mathbb{P}(Z_2 = k, Z_1 = 2)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_2 = 0) &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 0) + \mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 1) + \mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2 = 0)\mathbb{P}(Z_1 = 2) \\
&= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2 = 0)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2 = 0)\frac{1}{3} + \mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2 = 0)\frac{1}{3} \\
&= 1 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{6 + 3 + 2}{18} = \frac{11}{18}
\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_2=1) &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2=1)\frac{1}{3}+\mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2=1)\frac{1}{3}+\mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2=1)\frac{1}{3}\\ &= 0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{0+3+2}{18}=\frac{5}{18}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Z_2=2) &= \mathbb{P}_{(Z_1=0)}(Z_2=2)\frac{1}{3}+\mathbb{P}_{(Z_1=1)}(Z_2=2)\frac{1}{3}+\mathbb{P}_{(Z_1=2)}(Z_2=2)\frac{1}{3}\\ &= 0\cdot\frac{1}{3}+0\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{18}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Z_2(\Omega)=[\![0,2]\!],\ \mathbb{P}(Z_2=0)=\frac{11}{18},\ \mathbb{P}(Z_2=1)=\frac{5}{18},\ \mathbb{P}(Z_2=2)=\frac{2}{18}}$

b) *Calculons l'espérance et la variance de chacune des variables aléatoires Z_0, Z_1 et Z_2 :*

Les calculs sont rapides :

$\boxed{\mathbb{E}(Z_0)=2,\ \mathbb{V}(Z_0)=0}$ car Z_0 est une variable aléatoire certaine.

Pour Z_1 : $\mathbb{E}(Z_1)=\dfrac{0+2}{2}=1$ d'après le cours sur les lois uniformes.

$$\mathbb{E}(Z_1^2)=0^2\mathbb{P}(Z_1=0)+1^2\mathbb{P}(Z_1=1)+2^2\mathbb{P}(Z_1=2)=\frac{5}{3}.$$

D'où, d'après la formule de Koënig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_1)=E(Z_1^2)-\mathbb{E}(Z_1)^2=\frac{5}{3}-1^2,\text{ soit }\boxed{\mathbb{V}(Z_1)=\frac{2}{3}}$$

Pour Z_2 : $\mathbb{E}(Z_2)=0\mathbb{P}(Z_2=0)+1\mathbb{P}(Z_2=1)+2\mathbb{P}(Z_2=2)=\dfrac{5+2\times 2}{18}=\dfrac{9}{18}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

$$\mathbb{E}(Z_2^2)=0^2\mathbb{P}(Z_2=0)+1^2\mathbb{P}(Z_2=1)+2^2\mathbb{P}(Z_2=2)=\frac{5+2^2\times 2}{18}=\frac{13}{18}.$$

D'où, d'après la formule de Koënig-Huygens :

$$\mathbb{V}(Z_2)=E(Z_2^2)-\mathbb{E}(Z_2)^2=\frac{13}{18}-\frac{1}{4},\text{ soit }\boxed{\mathbb{V}(Z_2)=\frac{17}{36}}$$

② $\forall k\in\mathbb{N}$, on note C_k la colonne définie par $C_k=\begin{pmatrix}\mathbb{P}(Z_k=0)\\ \mathbb{P}(Z_k=1)\\ \mathbb{P}(Z_k=2)\end{pmatrix}$ et B la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 1/2 & 1/3\\ 0 & 0 & 1/3\end{pmatrix}$.

a) *Démontrons que pour tout entier naturel k, on a : $C_{k+1}=B\cdot C_k$.*
La démonstration repose sur l'application de la formule des probabilités totale en utilisant le système complet d'événements : $\{(Z_k=0),(Z_k=1),(Z_k=2)\}$.
On obtient pour tout $i\in[\![0,2]\!]$:

$$\mathbb{P}(Z_{k+1}=k)=\mathbb{P}(Z_{k+1}=k,Z_k=0)+\mathbb{P}(Z_{k+1}=k,Z_k=1)+\mathbb{P}(Z_{k+1}=k,Z_k=2)$$

ou encore :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1}=k)=\mathbb{P}_{(Z_k=0)}(Z_{k+1}=k)\mathbb{P}(Z_k=0)+\mathbb{P}_{(Z_k=1)}(Z_{k+1}=k)\mathbb{P}(Z_k=1)+\mathbb{P}_{(Z_k=2)}(Z_{k+1}=k)\mathbb{P}(Z_k=2)$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} \mathbb{P}(Z_{k+1}=0) & = 1\mathbb{P}(Z_k=0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_k=2) \\ \mathbb{P}(Z_{k+1}=1) & = 0\mathbb{P}(Z_k=0) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(Z_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_k=2) \\ \mathbb{P}(Z_{k+1}=2) & = 0\mathbb{P}(Z_k=0) + 0\mathbb{P}(Z_k=1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(Z_k=2) \end{cases}$$

Ce qui, matriciellement, s'exprime bien sous la forme $\boxed{C_{k+1} = B \cdot C_k}$

b) *Déterminons les valeurs propres de B et les sous-espaces propres correspondants :*
La matrice B est triangulaire supérieure, donc ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}}$

Déterminons maintenant chacun des sous-espaces vectoriels propres :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 = \ker(B - I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & -1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2y + 1/3z & = 0 \\ -1/2y + 1/3z & = 0 \\ 1/3z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = 0 \\ y & = 0 \\ & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/2} = \ker(B - \frac{1}{2}I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & -1/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1/2x + 1/2y + 1/3z & = 0 \\ 1/3z & = 0 \\ -1/6z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z & = 0 \\ x + y & = 0 \\ & \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{1/3} = \ker(B - \frac{1}{3}I_3) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2/3 & 1/2 & 1/3 \\ 0 & 1/6 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2/3x + 1/2y + 1/3z & = 0 \\ 1/6y + 1/3z & = 0 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3/2y + z & = 0 \\ y + 2z & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ 2x - 3z + 2z & = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y & = -2z \\ x & = z \\ & \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\},\ E_{1/2} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\},\ E_{1/3} = \text{Vect}\left\{\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right\}}$

c) *Montrons que la matrice B est diagonalisable et déterminons une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les éléments diagonaux $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ vérifient $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ telles que : $B = PDP^{-1}$:*

La matrice B est une matrice d'ordre 3 qui admet 3 valeurs propres distinctes, donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$.

La juxtaposition des bases respectives de E_1, $E_{1/2}$ et $E_{1/3}$ forme une famille libre de cardinal 3 de $\mathbb{R}^3$ donc $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de B, où on a posé :

$$u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (1,-1,0) \text{ et } u_3 = (1,-2,1)$$

On en déduit que :

$$B = PDP^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \frac{1}{2} & 0\\0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

d) *Justifions l'inversibilité de P et calculons P^{-1} :*
P est la matrice d'une base de $\mathbb{R}^3$ et à ce titre son rang est égale à son ordre : $\boxed{P \text{ est inversible}}$.
Calculons P^{-1} :

$$PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} x' + y' + z' & = x \\ -y' - 2z' & = y \\ z' & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z' & = z \\ y' & = -y - 2z \\ x' & = x + y + 2z - z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' & = x + y + z \\ y' & = -y - 2z \\ z' & = z \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix} = P}$ ✐ On peut vérifier $P^2 = P$...

e) *Écrivons pour tout entier naturel k la matrice B^k comme produit matriciel de matrices connues et déterminer la dernière colonne de B^k :*
D'après la question 2.c) nous avons : $B = PDP^{-1}$ et donc par récurrence :

$$B^k = PD^kP^{-1},\ \forall k \in \mathbb{N} \text{ [\textit{à écrire dans la copie}]}$$

La dernière colonne H_k de B^k s'obtient en effectuant le produit matriciel : $H_k = B^k \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

D'où :

$$\begin{aligned} H_k = PD^kP^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= P\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & (\frac{1}{2})^k & 0\\0 & 0 & (\frac{1}{3})^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\0 & -1 & -2\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-2(\frac{1}{2})^k\\(\frac{1}{3})^k\end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{H_k = \begin{pmatrix} 1 - 2(\dfrac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k \\ 2(\dfrac{1}{2})^k - 2(\frac{1}{3})^k \\ (\frac{1}{3})^k \end{pmatrix}}$$

f) *Précisons la valeur de C_0 et déduisons de la question précédente, pour tout entier naturel k, la loi de la variable aléatoire Z_k :*

Puisque le bus est en S_2, on a vu que Z_0 est la variable aléatoire certaine égale à 2, soit $C_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de la relation $C_{k+1} = B \cdot C_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on en déduit par récurrence : $C_k = B^k C_0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
On a donc : $C_k = H_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'où l'on peut déduire la loi de Z_k :

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{Z_k(\Omega) = [\![0, 2]\!], \begin{cases} \mathbb{P}(Z_k = 0) & = 1 - 2(\dfrac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k \\ \mathbb{P}(Z_k = 1) & = 2(\dfrac{1}{2})^k - 2(\frac{1}{3})^k \\ \mathbb{P}(Z_k = 2) & = (\frac{1}{3})^k \end{cases}}$$

g) *Calculons l'espérance de pour tout entier naturel k :*
Par définition de l'espérance, on a immédiatement :

$$\mathbb{E}(Z_k) = \mathbb{P}(Z_k = 1) + 2\mathbb{P}(Z_k = 2) = 2(\frac{1}{2})^k - 2(\frac{1}{3})^k + 2(\frac{1}{3})^k$$

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \, \mathbb{E}(Z_k) = \frac{1}{2^{k-1}}}$$

Partie III : Étude du temps d'arrivée au dépôt.

① Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, soit A_k l'événement : « le bus arrive (pour la première fois) au dépôt à l'instant k ». En remarquant qu'une fois que le bus arrive en S_0, il n'en repart plus, exprimer A_k en fonction des événements $(Z_k = 0)$ et $(Z_{k-1} = 0)$.

On note que A_k est réalisé si, et seulement si, le bus est au dépôt à l'instant k et n'y était pas à l'instant $k - 1$. Autrement dit :

$$A_k = (Z_k = 0) \cap \overline{(Z_{k-1} = 0)} = (Z_k = 0) \setminus (Z_{k-1} = 0)$$

Dès lors :

$$\mathbb{P}(A_k) = \mathbb{P}((Z_k = 0) \setminus (Z_{k-1} = 0)) = \mathbb{P}(Z_k = 0) - \mathbb{P}(Z_{k-1} = 0)$$

puisque $(Z_{k-1} = 0) \subset (Z_k = 0)$ (✐ en effet s'il est au dépôt à l'instant k, alors il y sera nécessairement à l'instant $k + 1$...)

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_k) &= 1 - 2(\frac{1}{2})^k + (\frac{1}{3})^k - 1 + 2(\frac{1}{2})^{k-1} - (\frac{1}{3})^{k-1} \\ &= -(\frac{1}{2})^{k-1} + \frac{1}{3}(\frac{1}{3})^{k-1} + 2(\frac{1}{2})^{k-1} - (\frac{1}{3})^{k-1}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*, \, \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$

② *Déterminons la probabilité de l'événement F : « le bus n'arrive jamais au dépôt » :*
On note que $\{F, (A_k)_{k\in\mathbb{N}^*}\}$ est un système complet d'événements. Dès lors :

$$\mathbb{P}(F) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 1$$

On rappelle que, d'après les propriétés des séries géométriques :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

et

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k) = 2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(F) = 0 \text{ - l'événement } F \text{ est quasi impossible.}}$

③ Soit T la variable aléatoire égale à l'instant où le bus arrive au dépôt. *Donnons la loi de T et calculons son espérance :*
On commence par noter que $\boxed{T(\Omega) = \mathbb{N}^*}$ et que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \, \boxed{\mathbb{P}(T = k) = \mathbb{P}(A_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}$$

Nous venons de déterminer la loi de T...

Pour l'espérance, on commence par justifier son existence en étudiant la convergence absolue de la série $\sum k\mathbb{P}(T = k)$ qui est aussi sa convergence puisque ses termes sont positifs. Or les séries $\sum k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$ et $\sum k \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ sont des séries géométriques dérivées convergentes car $|\frac{1}{2}| < 1$ et $|\frac{1}{3}| < 1$, donc $\sum k\mathbb{P}(T = k)$ converge comme combinaison linéaire de séries convergentes.
La variable aléatoire T admet une espérance et

$$\mathbb{E}(T) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} - \frac{2}{3}\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} = 4 - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = 4 - \frac{3}{2}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(T) = \dfrac{5}{2}}$

④ *Écrivons une fonction* ***simultT(n)*** *d'argument l'indice n de la station de départ, qui renvoie une valeur simulée de la variable aléatoire T définie ci-dessus :*
Il suffit de faire avancer le bus conformément à la simulation réalisée dans la partie I jusqu'à ce qu'il atteigne le dépôt (on rappelle que dans cette partie, il part de la station S_2)
On ne sait pas combien d'instant seront nécessaire pour que cet événement (quasi certain) d'arriver au dépôt se réalise aussi on utilise donc une structure répétitive « Tant que ».
Une rédaction possible est :

```
def simulT():
    t = 0
    S = 2 # le bus est en S2 au départ
    while S != 0:
       S = rdm.randint(0,S)
       t += 1
    return t
```

⑤ *Il s'agit de proposer une méthode utilisant Python permettant de confirmer la valeur théorique de $\mathbb{E}(T)$ trouvée ci-dessus :*
En utilisant le Théorème Central Limite, on peut réaliser un grand nombre de fois la simulation de la variable aléatoire T dont on calcule la moyenne empirique qui est un estimateur sans biais de $\mathbb{E}(T)$.
Puisqu'on ne peut pas utiliser `np.mean` ou `np.sum`, on écrira :

```
def moyEmpirT(m):
    St = 0
    for k in range(m):
       St += simulT()
    return St/m
```

En prenant `m = 1000` et en exécutant : `print('moy empirique = ',moyEmpirT(m),'esperance = ',5/2)`
on a obtenu l'affichage : `moy empirique = 2.488 esperance = 2.5`

Partie IV : Retour au cas général.

Désormais le bus dessert les stations $S_0, \cdots, S_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et il est à l'instant 0 à la station S_n.

IV/ A. Étude d'un endomorphisme

On note E_n l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ ds polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n et $\mathcal{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de E_n.
On considère f l'application qui à tout polynôme P de E_n associe le polynôme Q défini par :

$$Q = (X-1)P' + P$$

c'est-à-dire la fonction polynomiale Q définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = (x-1)P'(x) + P(x)$.

① *Montrons que l'application f ainsi définie est un endomorphisme de E_n :*

- Linéarité de f : $\forall P, Q \in E_n$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
  $f(\lambda P + \mu Q) = (X-1)(\lambda P + \mu Q)' + \lambda P + \mu Q = \lambda(X-1)P' + \lambda P + \mu(X-1)Q' + \mu Q$
  par linéarité de la dérivée.
  soit $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$
- Montrons que $f(E_n) \subset E_n$: Soit $P \in E_n$, alors $\deg(P') \leq n-1 \Rightarrow \deg((X-1)P') \leq n$ car le degré d'un produit de polynôme est égale à la somme de leur degré.
  Dès lors $(X-1)P' \in E_n$ et $P \in E_n$ donc $f(P) \in E_n$ car E_n est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est un endomorphisme de } E_n}$

② *Déterminons la matrice A de f dans la base $\mathcal{B}$:*
Il suffit de calculer l'image de la base canonique $(1, X, \cdots, X^n)$ de E_n par f :

$f(1) = 1$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $f(X^k) = (X-1)kX^{k-1} + X^k = -kX^{k-1} + (k+1)X^k$.

Soit ***Conclusion*** : $$\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & n+1 \end{pmatrix}}$$

③ *En déduire les valeurs propres de f :* Il suffit de noter que A est une matrice triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent donc sur sa diagonale. Soit $\boxed{\mathrm{Sp}(f) = [\![1, n+1]\!]}$
Par ailleurs f admet $n+1$ valeurs propres distinctes dans un espace E_n dont on rappelle qu'il est de dimension $n+1$. Donc $\boxed{f \text{ est diagonalisable}}$.
Le cours assure par ailleurs que, dans ces conditions, $\dim(E_\lambda(f)) = 1$, $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f)$.

④ Soit λ une valeur propre de f. Soit P un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ. *Montrons que P est solution sur $]1, +\infty[$ d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'on précisera :*

On a $f(P) = \lambda P \Leftrightarrow (x-1)P'(x) + P(x) = \lambda P(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
Donc P est solution sur $\mathbb{R}$, et *a fortiori* sur $]1, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$\boxed{(\mathcal{E}_\lambda) : (x-1)y' + (1-\lambda)y = 0.}$$

⑤ *Pour $k \in [\![0, n]\!]$, résolvons sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle $(E_k) : (x-1)y' - ky = 0$:*
Sur $]1, +\infty[$, $(E_k) \Leftrightarrow y' - \dfrac{k}{(x-1)}y = 0$. Posons $a : x \longmapsto \dfrac{k}{x-1}$. Cette fonction est continue sur $]1, +\infty[$ et admet une primitive $A : x \longmapsto k\ln(x-1)$.
Dès lors, les solutions de (E_k) sont les fonctions $y : x \longmapsto Ce^{k\ln(x-1)} = C(x-1)^k$
Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } (E_k) \text{ est } \mathrm{Vect}\{x \longmapsto (x-1)^k\}}$

⑥ *Déduisons-en une base $\mathcal{B}' = (P_0, P_1, \cdots, P_n)$ de E_n dans laquelle la matrice de f est diagonale et telle que pour $0 \leq j \leq n$, le polynôme P_j soit de degré j et de coefficient dominant égale à*

1 *:*
$\forall j \in [\![0,n]\!]$, $P_j = (X-1)^j$ est un polynôme de degré j et de coefficient dominant égale à 1.
On rappelle par ailleurs que $f(P_j) = (X-1)P_j'(X) + P_j$.
Donc :
– Pour $P_0 = 1$, $f(P_0) = f(1) = 1 = P_0$: P_0 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1
– Et d'après les questions IV.4. et IV.5., pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$f(P_j) = (j+1)P_j$$

Ou encore, $P_j = (X-1)^j$ est vecteur propre associé à la valeur propre $1-\lambda$.

La famille de polynôme $(P_0, P_1, \cdots, P_n)$ étant échelonnée en degré, elle est libre. Et comme son cardinal est égale à $n+1 = dim(E_n)$, c'est une base de E_n formée de vecteurs propres de f.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = ((1-X)^j, j \in [\![0,n]\!]) \text{ est une base de } E_n \text{ dans laquelle } f \text{ est diagonale}}$

⑦ *Justifions que f est bijectif :*
Il suffit de dire que $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$. ***Conclusion*** : $\boxed{f \text{ est bijectif}}$.
On note par la suite $g = f^{-1}$.

⑧ *Justifions que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0,n]\!]$ l'égalité : $g^k(P_j) = \dfrac{1}{(j+1)^k}P_j$*
C'est une question de cours.
Dans un premier temps, $(j+1) \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \dfrac{1}{j+1} \in \mathrm{Sp}(g)$ et $E_{j+1}(f) = E_{\frac{1}{j+1}}(g)$.
Donc, $\forall j \in [\![0,n]\!]$, $g(P_j) = \dfrac{1}{j+1}P_j$.
Par récurrence, on montre alors que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $g^k(P_j) = \dfrac{1}{(j+1)^k}P_j$.
En effet,

$$\begin{aligned} g^{k+1}(P_j) &= g\left(g^k(P_j)\right) = g\left(\frac{1}{(j+1)^k}P_j\right) = \frac{1}{(j+1)^k}g(P_j) \\ &= \frac{1}{(j+1)^k}\frac{1}{(j+1)}P_j = \frac{1}{(j+1)^{k+1}}P_j \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \forall j \in [\![0,n]\!],\ g^k(P_j) = \dfrac{1}{(j+1)^k}P_j}$

IV/ B. Étude de la variable aléatoire Z_k

Pour tout entier naturel k on note F_k la fonction génératrice de Z_k dont on rappelle qu'elle est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_k(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(Z_k = r)x^r = \mathbb{P}(Z_k = 0) + \mathbb{P}(Z_k = 1)x + \cdots + \mathbb{P}(Z_k = n)x^n$$

① *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, rappelons ce que valent $F_k(1)$ et $F_k'(1)$ pour la variable aléatoire Z_k :*
On l'a en effet vu dans les préliminaires : $\boxed{F_k(1) = 1 \text{ et } F_k'(1) = \mathbb{E}(Z_k)}$

② *Précisons les polynômes F_0 et F_1 dans la base canonique :*

– Comme Z_0 est la variable aléatoire certaine égale à n, on a $\mathbb{P}(Z_0 = n) = 1$. Donc :

$$F_0(x) = 0 + 0x + \cdots + 0x^{n-1} + 1x^n = x^n$$

Conclusion : $\boxed{F_0 = X^n}$

– Comme $Z_1 \hookrightarrow \mathcal{U}_{[\![0,n]\!]}$, $\mathbb{P}(Z_1 = r) = \dfrac{1}{n+1}$, $\forall r \in [\![0, n]\!]$. Donc :

$$F_1(x) = \sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(Z_1 = r)x^r = \frac{1}{n+1}\sum_{r=0}^{n} x^r$$

Conclusion : $\boxed{F_1 = \dfrac{1}{n+1}(1 + X + \cdots X^n)}$

③ Pour utiliser la formule des probabilités totales, on note que $\{(Z_k = n), n \in [\![0, n]\!]\}$ est un système complet d'événement. Donc

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(Z_{k+1} = r, Z_k = j) = \sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = r)\mathbb{P}(Z_k = j)$$

On rappelle que si le bus est à la station S_r alors il ne peut venir d'un arrêt S_k où $k < r$.
Autrement dit, $\mathbb{P}_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = r) = 0$ si $j < r$.
Dès lors :

$$\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{j=r}^{n} \mathbb{P}_{(Z_k=j)}(Z_{k+1} = r)\mathbb{P}(Z_=j) = \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j+1}\mathbb{P}(Z_=j)$$

puisque, si $(Z_k = j)$ est réalisé, alors le bus se rend selon une loi uniforme sur des stations d'indice dans $[\![0, j]\!]$.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall r \in [\![0, n]\!], \mathbb{P}(Z_{k+1} = r) = \sum_{j=r}^{n} \dfrac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1}}$

④ Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [\![0, n-1]\!]$, montrons les deux égalités demandées à l'aide de la relation qui précède :

– pour $r = n$, on a : $\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) = \displaystyle\sum_{j=n}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} = \frac{\mathbb{P}(Z_k = n)}{n+1}$.

Conclusion : $\boxed{(n+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = n) = \mathbb{P}(Z_k = n)}$

– Pour $r \in [\![0, n-1]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}(r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) &= (r+1)\sum_{j=r}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} = (r+1)\left(\frac{\mathbb{P}(Z_k = r)}{r+1} + \sum_{j=r+1}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1}\right) \\ &= \mathbb{P}(Z_k = r) + (r+1)\sum_{j=r+1}^{n} \frac{\mathbb{P}(Z_k = j)}{j+1} \\ &= \mathbb{P}(Z_k = r) + (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) \text{ d'après 3.}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r) - (r+1)\mathbb{P}(Z_{k+1} = r+1) = \mathbb{P}(Z_k = r)}$

⑤ *Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, établissons en utilisant les égalités ci-dessus la relation suivante :*

(S) : $(X-1)F'_{k+1}(X) + F_{k+1}(X) = F_k(X)$ (ce résultat peut être admis pour la suite)

On rappelle que par définition, $F_{k+1}(x) = \displaystyle\sum_{r=0}^{n} \mathbb{P}(Z_{k+1} = r)x^r$. Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-1)F'_{k+1}(x) &= \sum_{r=1}^{n}(x-1)\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)rx^{r-1}\\ &= \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)rx^r - \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)rx^{r-1}\end{aligned}$$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(x-1)F'_{k+1}(x) + F_{k+1}(x) &= \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)rx^r - \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)rx^{r-1} + \sum_{r=0}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)x^r\\ &= \sum_{r=0}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)(r+1)x^r - \sum_{r=1}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)rx^{r-1}\\ &= \sum_{r=0}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)(r+1)x^r - \sum_{j=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z_{k+1}=j+1)(j+1)x^j\\ &\qquad\text{en posant } j = r-1\\ &= \sum_{r=0}^{n}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r)(r+1)x^r - \sum_{r=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z_{k+1}=r+1)(r+1)x^r\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\left(\mathbb{P}(Z_{k+1}=r) - \mathbb{P}(Z_{k+1}=r+1)\right)(r+1)x^r + \mathbb{P}(Z_{k+1}=n)(n+1)x^n\\ &= \sum_{r=0}^{n-1}\mathbb{P}(Z_k=r)x^r + \mathbb{P}(z_k=n)x^n \text{ d'après les égalités ci-dessus}\\ &= F_k(x)\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(S) : (X-1)F'_{k+1}(X) + F_{k+1}(X) = F_k(X)}$

⑥ *Calculons l'espérance de Z_k :*

a) En dérivant une première fois la relation (S), on obtient pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$F'_{k+1}(x) + (x-1)F''_{k+1}(x) + F'_{k+1}(x) = F'_k(x)$$

et en particulier pour $x = 1$, on a : $2F'_{k+1}(x) = F'_k(x)$. ***Conclusion*** : $\boxed{F'_{k+1}(1) = \dfrac{F'_k(1)}{2}}$

En posant $u_k = F'_k(1)$, on vient d'obtenir que $\boxed{u_{k+1} = \dfrac{u_k}{2},\ \forall k \in \mathbb{N}}$.

b) En reconnaissant une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $u_0 = F'_0(1) = \mathbb{E}(Z_0) = n$, on obtient :

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}(Z_k) = u_k = \dfrac{u_0}{2^k} = \dfrac{n}{2^k}}$

c) Dans le cas particulier où $n = 2$, on retrouve $\boxed{\mathbb{E}(Z_k) = \frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}}$, à savoir la valeur calculée dans la partie II.

⑦ **Détermination de la loi de Z_k :**

a) En utilisant le résultat de la question IV/B.5, on a : $F_k = f(F_{k+1})$ où f est l'endomorphisme défini dans la partie B/I.
On grâce la question IV/A.7, f étant bijectif avec $g = f^{-1}$, on en déduit que $\boxed{F_{k+1} = g(F_k)}$.

Un raisonnement par récurrence, on en déduit immédiatement que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $F_k = g^k(F_0)$.
Et comme $F_0 = X^n$ d'après IV/B.2, on a ***Conclusion*** : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N} : F_k = g^k(X^n)}$

b) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de Newton :

$$X^n = (X - 1 + 1)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (X-1)^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j$$

où $P_0, P_1, \cdots, P_n$ sont les polynômes définis en IV/A.6.

c) On utilise que g^k est un endomorphisme puisque $g \in \mathcal{L}(E_n)$. Dès lors :

$$\forall k \in \mathbb{N} : F_k = g^k(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} P_j) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g^k(P_j)$$

Et comme $g^k(P_j) = \frac{1}{(j+1)^k} P_j$, on a :

Conclusion : $\boxed{F_k = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)^k} P_j}$

d) Pour déterminer la loi, il suffit de rappeler le résultat des préliminaires, à savoir :

$$\mathbb{P}(Z_k = r) = \frac{F^{(r)}(0)}{r!} = \frac{1}{r!} \sum_{j=0}^{r} \binom{n}{j} \frac{1}{(j+1)^k} P_j^{(r)}(0)$$

Mais

$$P_j^{(r)}(X) = ((X-1)^j)^{(r)} = \frac{j!}{(j-r)!}(X-1)^{j-r}$$

et donc,

$$P_j^{(r)}(0) = \frac{j!}{(j-r)!}(-1)^{j-r}$$

Soit, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [\![0, n]\!]$, l'égalité :

$$\boxed{\mathbb{P}(Z_k = r) = \sum_{j=r}^{n} (-1)^{(j-r)} \frac{\binom{n}{j}\binom{j}{r}}{(j+1)^k}}$$

Complément. Fonction génératrice de variables à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Dans la suite, nous admettrons la propriété suivante, généralisant le résultat des Préliminaires, A.1.b) : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la connaissance de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$ entraîne la connaissance de la loi de X. Ceci permet donc de reconnaître la loi d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction génératrice.
Par ailleurs, si g_X est dérivable en 1, alors $\mathbb{E}(X)$ existe et vaut $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$.
Soit maintenant X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$a_n = \mathbb{P}(X = n) \text{ et donc } g_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \text{ en tout } t \text{ réel où la série converge}$$

① *Montrons que pour tout $t \in [-1,1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1,1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$:*

$\forall t \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant a_n$.
Par définition d'une loi de probabilité (σ-additivité), la série $\sum a_n$ converge, et sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ vaut 1 car $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

Par application du théorème de comparaison des séries à termes positifs nous pouvons conclure que la série $\sum a_n t^n$ converge absolument. Or la convergence absolue entraîne la convergence.

Conclusion : $\boxed{g_X \text{ est défini sur } [-1,1] \text{ et } g_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1}$.

Remarque : On pouvait aussi écrire que $\forall t \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ |a_n t^n| \leqslant |t^n|$.
Or, $\forall t \in]-1,1[$, $\sum |t^n| = \sum |t|^n$ converge car c'est une série géométrique avec $|t| < 1$ donc, par application du théorème de comparaison, $\sum |a_n t^n|$ converge.
Par ailleurs, pour $|t| = 1$, $\sum |a_n t^n| = \sum |a_n| = \sum a_n$ converge de somme égale à 1. Ce qui permet de conclure que $\sum a_n t^n$ converge absolument et donc que g_X est défini sur $[-1,1]$.

Lu dans le rapport de jury : « *Question très rarement bien traitée (10% des candidats montrent correctement l'absolue convergence).*
La majoration $|a_k t^k| \leq |t^k|$ ne permet de montrer l'absolue convergence que lorsque $|t| < 1$. Le cas $|t| = 1$ doit alors être étudié à part, ce que les candidats remarquent très rarement. La solution la plus rapide consiste à effectuer la majoration $|a_k t^k| \leq a_k$. Quelques candidats se lancent dans des calculs avec des séries ! !
Parmi les erreurs rencontrées dans plusieurs copies, on trouve :
- la série de terme général $a_k|t|^k$ est une série géométrique...
- $\lim_{k\to+\infty} |a_k t^k| = 0$, donc la série est absolument convergente... - $a_k|t|^k$ est majorée par 1, donc la série est absolument convergente...
- des candidats écrivent $|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} a_k |t|^k$, pour en déduire la convergence de la série... »

② Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. *Montrons que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1,1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$:*

Si X et Y sont indépendantes, alors $\forall t \in [-1,1]$ les variables aléatoires t^X et t^Y sont indépendantes et admettent des espérances d'après le 1.
Donc $g_{X_1+X_2}(t) = E(t^{X_1+X_2}) = E(t^{X_1}t^{X_2}) = E(t^{X_1})E(t^{X_2}) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)$.

$$\boxed{g_{X_1+X_2}(t) = g_{X_1}(t)g_{X_2}(t)}$$

③ a) ☺ On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$, à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. *Calculons $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ (on pourra poser $q = 1-p$). En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$.*

X suit une loi géométrique de paramètre p.
On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X=k) = pq^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.
Alors la question B.1. justifie l'existence de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1,1]$ (sinon on écrit que la série $\sum_{k\geq 1} pq^{k-1}t^k$ est de même nature que $\sum_{k\geq 1}(qt)^{k-1} = \sum_{i\geq 0}(qt)^i$ qui est une série géométrique convergente).

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1}t^k = pt\sum_{k=0}^{+\infty}(qt)^k = \frac{pt}{1-qt}, \text{ car } |qt| < 1$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question a permis aux élèves moyens, mais sérieux, de faire la différence.*
Attention, $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$: trop de candidats ont commencé la somme à 0. Trop ont oublié ou n'ont pas justifié correctement la convergence de la série géométrique. »

On rappelle ensuite que $\mathbb{E}(X) = g'_X(1)$.
Or $g'_X(t) = \dfrac{p(1-qt)+qpt}{(1-qt)^2} = \dfrac{p}{(1-qt)^2}$.
✐ On note que $\forall t \in [-1,1]$, $1-qt \neq 0$ puisque $t = 1/q$ impossible (en effet : $\frac{1}{q} > 1$)

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = \dfrac{p}{(1-q)^2} = \dfrac{1}{p}}$

✐ Pour la méthode « usuelles », on se rapportera au cours.

b) On suppose ici que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

i. ☺ *Calculons $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ et retrouvons l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$:*
On rappelle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
Alors,$\forall t \in [-1,1]$, $g_X(t)$ est la somme d'une série convergente et :

$$\forall t \in [-1,1],\ g_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{\lambda t}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Souvent bien traitée.* »

Pour $\mathbb{E}(X)$, $g'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$, donc $\boxed{\mathbb{E}(X) \text{ existe et vaut } \mathbb{E}(X) = g'_X(1) = \lambda}$

ii. ☺ Si X et Y sont deux variables indépendantes qui suivent respectivement une loi de Poisson de paramètre λ et μ. *Déterminons $g_{X+Y}(t)$ et en déduire que $X+Y$ suit une loi de Poisson dont on précisera le paramètre :*

Par application de la question 2. on obtient que $S = X + Y$ admet pour fonction de répartition :

$$g_S(t) = g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t) = e^{\lambda(t-1)}e^{\mu(t-1)} = e^{(\lambda+\mu)(t-1)}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.
La fonction de répartition caractérisant la loi d'une variable aléatoire (cf introduction des ces « compléments »ou question 1.b.ii) des préliminaires...), on peut conclure que :

$$\boxed{S \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)}$$