DL 05 MATHEMATIQUES
Réduction d'endomorphismes

Problème : (D'après ENS-Lettres/Sciences humaines 2005)

E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d ou $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$.

Préliminaires

1. f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f \circ g = g \circ f$.

   a) *Montrons que l'image de g est stable par f :*
   Montrons que $f(\mathrm{Im}g) \subset \mathrm{Im}g$ ou encore : $\forall v \in E$, $v \in \mathrm{Im}g \Rightarrow f(v) \in \mathrm{Im}g$:
   Soit $v \in \mathrm{Im}g$, alors $\exists u \in \mathbb{E}/g(u) = v$.
   Dès lors, par définition d'une application : $f(v) = f[g(u)] = f \circ g(u) = g \circ f(u)$ puisque $f \circ g = g \circ f$ par hypothèse.
   D'où $f(v) = g[f(u)]$. Ce qui prouve que $f(v) \in \mathrm{Im}g$.
   Conclusion : $\boxed{f(\mathrm{Im}g) \subset \mathrm{Im}g}$

   b) *Montrons que le noyau de g est stable par f :*
   Montrons que $f(\mathrm{Ker}g) \subset \mathrm{Ker}g$ ou encore $\forall u \in E$, $u \in Kerg \Rightarrow f(u) \in Kerg$:
   Soit $u \in \mathrm{Ker}g$, alors $g(u) = 0$ et donc $f[g(u)] = f(0) = 0$ car f est linéaire.
   Dès lors, f et g commutant, on a : $g[f(u)] = 0$, ce qui prouve que $f(u) \in \mathrm{Ker}g$, CQFD.
   Conclusion : $\boxed{f(\mathrm{Ker}g) \subset \mathrm{Ker}g}$.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d \in \mathbb{R}$ et $M_d = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{d-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \lambda_d^2 & \cdots & \lambda_d^{d-1} \end{pmatrix}$

   a) $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est une matrice d'ordre 2.
   Dès lors, M_2 est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(M_2) = 2$.
   Or $\mathrm{rg}(M_2) = \mathrm{rg} \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 - L_1 \end{array} \end{array}$
   Conclusion : $\boxed{M_2 \text{ est inversible si et seulement si } \lambda_1 \neq \lambda_2}$.

   b) On suppose désormais $d \geq 2$ et on pose $P(X) = X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} p_k X^k$ où $p_k \in \mathbb{R}$.
   Les opérations du pivot de Gauss et notamment les combinaisons linéaires sur les colonnes du type $C_d \leftarrow C_d + \sum_{k=0}^{d-2} p_k C_{k+1}$ où les colonnes sont notées C_k ne modifiant pas le rang des matrices, on a immédiatement :

$$\operatorname{rg}(M_d) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-2} & \lambda_1^{d-1}\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-2} & \lambda_2^{d-1}\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-1} & \lambda_d^{d-1}\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-2} & P(\lambda_1)\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-2} & P(\lambda_2)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-2} & P(\lambda_d)\end{pmatrix} = \operatorname{rg}(M'_d)$$

c) On suppose toujours que $d \geq 2$.
L'égalité précédente sur les rangs de M_d et M'_d étant vraie pour tout polynôme normalisé de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$ de la forme $P(X) = X^{d-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{d-2} p_k X^k$ elle est en particulier vraie pour :

$$P(X) = (X-\lambda_1)(X-\lambda_2)\cdots(X-\lambda_{d-1}) = X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} p_k X^k$$

Remarque : On peut même rappeler si on le souhaite les relations entre racines et coefficients d'un polynôme et préciser que :

$$p_0 = -\sum_{k=1}^{d-1}\lambda_k \text{ et } p_{d-2} = (-1)^{d-1}\prod_{k=1}^{d-1}\lambda_k$$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{rg}(M_d) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-2} & 0\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-2} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-2} & \displaystyle\prod_{k=1}^{d-1}(\lambda_d-\lambda_k)\end{pmatrix} = \operatorname{rg}(M''_d)}$

d) Soit $\mathcal{P}_d$ la proposition : « M_d est inversible si et seulement si $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$, $i, j \in [\![1, d]\!]$ ».

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_d$ est vraie pour tout entier naturel $d \geq 2$:
– $\mathcal{P}_2$ est vraie d'après la question 2.a).
– Supposons que $\mathcal{P}_d$ est vraie pour d fixé, $d \geq 2$.
– D'après 2.c),

$$\operatorname{rg}(M_{d+1}) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-1} & 0\\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-1} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-1} & 0\\ 1 & \lambda_{d+1} & \cdots & \lambda_{d+1}^{d} & \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(\lambda_{d+1}-\lambda_k)\end{pmatrix} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{M_d} & 0\\ \cdots & \displaystyle\prod_{k=1}^{d}(\lambda_{d+1}-\lambda_k)\end{pmatrix}$$

$\operatorname{rg}(M_{d+1}) = \operatorname{rg}(M_d) + 1$ si et seulement si $\displaystyle\prod_{k=1}^{d}(\lambda_{d+1}-\lambda_k) \neq 0$.

Donc $\operatorname{rg}(M_{d+1}) = d+1 \Leftrightarrow \operatorname{rg}(M_d) = d$ **et** $\displaystyle\prod_{k=1}^{d}(\lambda_{d+1}-\lambda_k) \neq 0$.

Dès lors, grâce à l'hypothèse de récurrence,

$$\operatorname{rg}(M_{d+1}) = d+1 \Leftrightarrow \lambda_i \neq \lambda_j,\ \forall i \neq j,\ i, j \in [\![1, d]\!] \textbf{ et } \prod_{k=1}^{d}(\lambda_{d+1}-\lambda_k) \neq 0$$

D'où M_{d+1} inversible ssi les $\lambda_i \neq \lambda_j$, $\forall i \neq j$, $i, j \in [\![1, d+1]\!]$.

Conclusion : $\boxed{M_d \text{ est inversible si et seulement si les } \lambda_1, ..., \lambda_d \text{ sont deux à deux distincts}}$.

Partie I

On précise qu'un vecteur v de E est dit *totalisateur* de f si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la famille $\mathcal{F} = \{v, f(v), \cdots, f^N(v)\}$ est *une famille génératrice de* E. Autrement dit si :

$$\forall x \in E, \exists (a_0, a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{R}^{N+1} / x = a_0 v + a_1 f(v) + \cdots + a_N f^N(v)$$

1. On suppose ici que $d = 2$ et que f admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes.

   a) f admet deux valeurs propres distinctes dans un espace vectoriel de dimension 2 donc f est diagonalisable. Il existe donc une base de vecteur propre qu'on notera $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ telle que $\mathcal{M}'_{\mathcal{B}}(f) = D_2$ soit diagonale.
   On considérera pour la suite que $u_1 \in E_{\lambda_1}$ et $u_1 \in E_{\lambda_2}$.

   b) Soit $v = u_1 + u_2$. On a par linéarité de f : $f(v) = f(u_1) + f(u_2)$.
   u_1 et u_2 étant deux vecteurs propres de f associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2, on a immédiatement :
   $$f(v) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$$
   Il reste à montrer que v est totalisateur... considérons pour ça la famille $\mathcal{F}_2 = \{v, f(v)\}$ et montrons que cette famille est génératrice.
   Comme cette famille est composée de 2 vecteurs et que $\dim(E) = d = 2$, cette famille est génératrice si et seulement si c'est une base ou encore si et seulement si c'est une famille libre. Nous allons donc montrer que $\mathcal{F}_2 = \{v, f(v)\}$ est libre :

   C'est immédiat car dans la base $\mathcal{B}'$, $v = (1,1)_{\mathcal{B}'}$ et $f(v) = (\lambda_1, \lambda_2)_{\mathcal{B}'}$. Alors :
   $$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \mathrm{rg}(v, f(v)) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(M_2) = 2 = d$$
   Donc $(v, f(v))$ est une base de E et $\boxed{v = u_1 + u_2 \text{ est un vecteur totalisateur pour } f}$.

2. On revient dans le cas général où $d \geq 2$. Si f a d valeurs propres distinctes, alors f a autant de valeurs propres distinctes que la dimension de E. C'est une condition **suffisante** pour assurer que f est diagonalisable.
   Donc $\exists \mathcal{B}' = (u_1, u_2, \cdots, u_d)$ base de E formée de vecteurs propres de f tels que $u_k \in E_{\lambda_k}$ pour $1 \leq k \leq d$.
   En s'inspirant de la question précédente, on pose $v = u_1 + u_2 + \cdots + u_d$ et on calcule successivement $f(v)$, $f^2(v)$, $\cdots$, $f^{d-1}(v)$.
   Rappelons au préalable que si $u \in E_\lambda(f)$ alors $f^n(u) = \lambda^n u$ pour tout entier $n \geq 0$.
   Dès lors :
   $$\begin{cases} f(v) &= f(u_1) + f(u_2) + \cdots + f(u_d) = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_d u_d \\ f^2(v) &= f^2(u_1) + f^2(u_2) + \cdots + f^2(u_d) = \lambda_1^2 u_1 + \lambda_2^2 u_2 + \cdots + \lambda_d^2 u_d \\ \vdots &= \vdots \\ f^{d-1}(v) &= f^{d-1}(u_1) + f^{d-1}(u_2) + \cdots + f^{d-1}(u_d) = \lambda_1^{d-1} u_1 + \lambda_2^{d-1} u_2 + \cdots + \lambda_d^{d-1} u_d \end{cases}$$
   Dans la base $\mathcal{B}'$ on a donc :
   $$\mathrm{rg}(v, f(v), f^2(v), \cdots, f^{d-1}(v)) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-2} & \lambda_1^{d-1} \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-2} & \lambda_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-1} & \lambda_d^{d-1} \end{pmatrix} = \mathrm{rg}(M_d)$$

La matrice M_d étant inversible si les λ_i sont distincts 2 à 2 d'après les préliminaires, on en déduit immédiatement que $(v, f(v), f^2(v), \cdots, f^d(v))$ est une base de E puisque les valeurs propres sont supposées distinctes 2 à 2.

Conclusion : $\boxed{v = u_1 + \cdots + u_d \text{ est un vecteur totalisateur pour } f}$.

3. *Exemple* : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de E.

   a) Recherchons les valeurs propres de A :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}), X \neq 0 / AX = \lambda X \\ &\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C}), X \neq 0 / (A - \lambda I)X = 0 \\ &\Leftrightarrow (A - \lambda I)X = 0 \text{ n'est pas un système de Cramer} \\ &\Leftrightarrow A - \lambda I \text{ n'est pas inversible} \\ &\Leftrightarrow rg(A - \lambda I) < 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rg(A - \lambda I) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 3 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_3 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_1 \end{array} \\ &= \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2-\lambda \\ 0 & -(\lambda+3) & 3+\lambda \\ 0 & 3\lambda - 5 & 5 - \lambda^2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - (2-\lambda)L_1 \end{array} = \text{rg}(U_\lambda) \end{aligned}$$

   – *Premier cas :* Si $\lambda = -3$ alors :

$$\text{rg}(A - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

   Donc $\lambda = -3$ est valeur propre de A.

   – *Deuxième cas :* Si $\lambda \neq -3$ on poursuit notre pivot de Gauss... Alors :

$$\text{rg}(A - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2-\lambda \\ 0 & -(\lambda+3) & 3+\lambda \\ 0 & 0 & P(\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow (\lambda+3)L_3 + (3\lambda-5))L_2 \end{array} = \text{rg}(V_\lambda)$$

   où

$$P(\lambda) = (\lambda+3)(5-\lambda^2) + (3\lambda-5)(3+\lambda) = (\lambda+3)(-\lambda^2+3\lambda) = \lambda(\lambda+3)(-\lambda+3)$$

   Donc si $\lambda \neq -3$ λ est valeur propre de A ssi $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ ou $\lambda = 3$

   Conclusion : $\boxed{\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\} \text{ où } \lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = 0 \text{ et } \lambda_3 = 3}$

   b) *Détermination de chacun des sous-espaces vectoriels propres* :

   – Détermination de E_{-3} : $X \in E_{-3} \Leftrightarrow AX = -3X \Leftrightarrow (A + 3I)X = 0 \Leftrightarrow U_{-3} \cdot X = 0$

$$X \in E_{-3} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z &= 0 \\ -14y - 4z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= -\dfrac{7}{2}y \\ x &= -3y - z = \dfrac{1}{2}y \end{cases}, \forall y \in \mathbb{R}$$

   Conclusion : $\boxed{E_{-3} = \left\{ \begin{pmatrix} y/2 \\ y \\ -7y/2 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}}$

– Détermination de E_0 : $X \in E_0 \Leftrightarrow AX = 0X \Leftrightarrow AX = 0 \Leftrightarrow V_0 \cdot X = 0$

$$X \in E_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 2z &= 0 \\ -3y + 3z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= y \\ x &= -3y + 2z = -y \end{cases}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{E_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}}$

– Détermination de E_3 : $X \in E_3 \Leftrightarrow AX = 3X \Leftrightarrow (A - 3I)X = 0 \Leftrightarrow V_3 \cdot X = 0$

$$X \in E_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y - 5z &= 0 \\ -6y + 6z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z &= y \\ x &= -3y + 5z = 2y \end{cases}, \forall y \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{E_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 2y \\ y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}}$

On posera pour la suite $u_1 = (1, 2, -7)$, $u_2 = (1, -1, -1)$ et $u_3 = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

✐ *Note* : On oubliera pas de vérifier explicitement dans la copie que

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}, \; A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } A \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

A est diagonalisable car $\text{Card}[\text{Sp}(A)] = 3 = \dim(E)$ ou encore parce que $\dim(E_{-3}) + \dim(E_0) + \dim(E_3) = 3 = \dim(E)$.
En conséquence

$$E = E_{-3} \oplus E_0 \oplus E_3$$

et donc $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de E par juxtaposition d'une base de E_{-3}, E_0 et de E_3.

Soit $P = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1/2 \\ -7 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$. Alors $\boxed{A = PDP^{-1} \text{ où } D = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$.

c) A admet trois valeurs propres distinctes donc d'après la question I.2), $v = u_1 + u_2 + u_3$ est un vecteur totalisateur pour f. On a immédiatement ses coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. En effet :

$$v = (1, 1, 1)_{\mathcal{B}'} = (1, 2, -7)_{\mathcal{B}} + (1, -1, -1)_{\mathcal{B}} + (1, 1/2, 1/2)_{\mathcal{B}} = (3, 3/2, -15/2)_{\mathcal{B}}$$

Toujours d'après la question I.2) on sait que $\mathcal{B}'' = (v, f(v), f^2(v))$ est une base de E.
Exprimons la matrice A'' de f dans cette base :

On note que : $\begin{cases} f(v) &= (0, 1, 0)_{\mathcal{B}''} \\ f[f(v)] &= f^2(v) = (0, 0, 1)_{\mathcal{B}''} \\ f[f^2(v)] &= f^3(v) = (b_0, b_1, b_2)_{\mathcal{B}''} \text{ car } f^3(v) \in E \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{A'' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix}}$ où $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$

Partie II

1. On suppose qu'il existe $v \in E / f^d(v) = 0$ et $f^{d-1}(v) \neq 0$. *Montrons que* $\mathcal{F} = \{v, f(v), \cdots, f^{d-1}(v)\}$ *est libre* :

   – *Première méthode :* Par l'absurde - On suppose que la famille n'est pas libre. Autrement dit $\exists(\alpha_1, \cdots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{R}^d / \exists k \in [\![0, d-1]\!], \alpha_k \neq 0$ et $\alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \cdots + \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) = 0$ (*)
   Posons $p = min\{k \in [\![0, d-1]\!] / \alpha_k \neq 0\}$.
   (*) $\Rightarrow \alpha_p f^p(v) + \alpha_{p+1} f^{p+1}(v) + \cdots + \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) = 0$
   On compose par $f^{d-1-p} \in \mathcal{L}(E)$. Alors :
   $$(*) \Rightarrow \alpha_p f^{d-1}(v) + \alpha_{p+1} f^d(v) + \cdots + \alpha_{d-1} f^{2d-2-p}(v) = 0$$
   Or $f^n(v) = 0$, $\forall n \geq d$ donc
   (*) $\Rightarrow \alpha_p f^{d-1}(v) = 0 \Rightarrow \alpha_p = 0$ car $f^{d-1}(v) \neq 0$. Absurde par définition de α_p.
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une famille libre}}$.

   – *Deuxième méthode :* Par itération du raisonnement.
   Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{R}^d / \alpha_0 v + \alpha_1 f(v) + \cdots + \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) = 0$ (*)
   En composant (*) par $f^{d-1} \in \mathcal{L}(E)$, on obtient :
   $$\alpha_0 f^{d-1}(v) + \alpha_1 f^d(v) + \cdots + \alpha_{d-1} f^{2d-2}(v) = f^{d-1}(0) = 0$$
   D'où (*) $\Rightarrow \alpha_0 f^{d-1}(v) = 0$ puisque $f^n(v) = 0$, $\forall n \geq d$.
   Or $f^{d-1}(v) \neq 0$ donc $\alpha_0 = 0$.
   Dès lors
   $$(*) \Rightarrow \alpha_1 f(v) + \alpha_2 f^2(v) + \cdots + \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) = 0$$
   En composant successivement par $f^{d-2}, \cdots, f$ on obtient $\alpha_1, \cdots, \alpha_{d-2} = 0$.
   D'où (*) $\Rightarrow \alpha_{d-1} f^{d-1}(v) = 0$ et donc $\alpha_{d-1} = 0$ car $f^{d-1}(v) \neq 0$...
   Conclusion : $\boxed{\mathcal{F} \text{ est une famille libre}}$.

2. *Exemple* : Soit $A_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) $A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A_1^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il existe donc $p = 3 \in \mathbb{N}^* / A_1^p = 0$.
   Conclusion : $\boxed{A_1 \text{ est nilpotente d'ordre } 3}$.

   b) Sachant que $A_1^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f^2)$, on a à la lecture de A_1^2 : $f^2(e_2) = (0, -2, -2)_{\mathcal{B}} \neq 0$.
   Conclusion : $\boxed{\text{Si } u = e_2 \text{ alors } f^2(u) \neq 0}$.

   Remarque : On aurait tout aussi bien pu prendre $u = e_3$ ou $u = e_2 + e_3$, en fait tout $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $y \neq z$...

   c) On a $f^2(u) = (1, -1, -1)_{\mathcal{B}}$ et $f^3(u) = 0$ donc, d'après la question II.1), en prenant $d = 3$, on obtient immédiatement que : $\{u, f(u), f^2(u)\}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
   Comme par ailleurs, $\text{Card}(\{u, f(u), f^2(u)\}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$, on a :
   $\boxed{\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

   Il découle immédiatement de cette conclusion que $\boxed{u \text{ est un vecteur totalisateur pour } f}$.

d) Soit $A_1' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$.

Pour construire cette matrice, il suffit de noter que $\begin{cases} f(u) & = (0,1,0)_{\mathcal{B}'} \\ f[f(u)] & = f^2(u) = (0,0,1)_{\mathcal{B}'} \\ f[f^2(u)] & = f^3(u) = (0,0,0)_{\mathcal{B}''} \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{A_1' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

Quant au lien entre A_1 et A_1' il s'agit de $A_1' = P_1^{-1}A_1P_1$ où $P_1 = \mathcal{P}(\mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3. $f \in \mathcal{L}(E)$ et v est un vecteur non nul de E.
Soit q le plus grand entier tel que $\mathcal{F}_q = \{v, f(v), \cdots, f^{q-1}(v)\}$ est une famille libre.

a) *Montrons que* $1 \leq q \leq d$: $v \neq 0$ donc $\mathcal{F}_1 = \{v\}$ est une famille libre de E et donc $q \geq 1$.
$\dim(E) = d$ donc toute famille de strictement plus de d vecteurs est liée.
Conclusion : $\boxed{1 \leq q \leq d}$.

b) *Montrons que Vect*$\{\mathcal{F}_q\}$ *est stable par* f : Montrons que si $x \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$, alors $f(x) \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$

$$x \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\} \Leftrightarrow \exists (a_0, \cdots, a_{q-1}) \in \mathbb{R}^q / x = a_0 v + a_1 f(v) + \cdots a_{q-1} f^{q-1}(v)$$

Donc $f(x) = a_0 f(v) + a_1 f^2(v) + \cdots a_{q-1} f^q(v)$ car f est linéaire.
Or, par définition de q, la famille $\{v, f(v), f^2(v), \cdots, f^q(v)\}$ est liée, ce qui assure que $f^q(v) \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$.
Comme par ailleurs $\text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on a donc $f(x) \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$.
Conclusion : $\boxed{\text{Vect}\{\mathcal{F}_q\} \text{ est stable par } f}$.

c) On suppose que v est un vecteur totalisateur pour f. *Montrons que* $(v, f(v), \cdots, f^{d-1}(v))$ *est une base de* E :
v étant totalisateur, $\exists N \in \mathbb{N}^* / \{v, f(v), \cdots, f^N(v)\}$ est une famille génératrice de E.
Comme $\dim(E) = d$ on peut assurer que $N \geq d$.
D'après 3.a) il est possible d'extraire de cette famille une famille libre $\mathcal{F}_q = \{v, f(v), \cdots, f^{q-1}(v)\}$ avec $1 \leq q \leq d$.
Il reste à montrer que cette famille forme une base de E :

- $f^q(v) = f[f^{q-1}] \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$ d'après 3.b).
- Plus généralement, $f^n(v) = f^{n-q+1}[f^{q-1}(v)] \in \text{Vect}\{\mathcal{F}_q\}$, $\forall n \geq q$ d'après 3.b).
- Donc $\mathcal{F}_q$ engendre les vecteurs de $\{v, f(v), \cdots, f^N(v)\}$ ou encore $\text{Vect}\{\mathcal{F}_q\} = E$.
- Comme par définition $\mathcal{F}_q$ est une famille libre, on en déduit :

Conclusion : $\boxed{\mathcal{F}_q \text{ est une base de } E \text{ et } \text{Card}(\mathcal{F}_q\}) = \dim(E) = d = q}$.

Soit $\mathcal{B}' = (v, f(v), \cdots, f^{d-1}(v))$ cette base. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & b_{d-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{d-1} \end{pmatrix}$$

car $f^d(v) = f[f^{d-1}(v)] \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}_d)$
donc $\exists(b_0, \cdots, b_{d-1}) \in \mathbb{R}^d / f^d(v) = b_0 v + \cdots + b_{d-1} f^{d-1}(v)$.

Partie III

Soit f un endomorphisme de E. On suppose, et c'est essentiel pour la suite, qu'il existe au moins un vecteur totalisateur v pour f.

1. *Montrons que* $\mathbb{R}[f] = \{g \in \mathcal{L}(E) / \exists P \in \mathbb{R}[X], g = P(f)\}$ *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{L}(E)$:
   - Par définition, $\mathbb{R}[f] \subset \mathcal{L}(E)$.
   - L'endomorphisme nul noté $0_{\mathcal{L}(E)}$ appartient à $\mathbb{R}[f]$ car si on note P_0 le polynôme nul de $\mathbb{R}[X]$ alors
   $$0_{\mathcal{L}(E)} = 0f^0 + 0f + 0f^1 + \cdots + 0f^n + \cdots = P_0(f)$$
   - $\forall (g_1, g_2) \in \mathbb{R}^2[f], \forall \alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha g_1 + g_2 \in \mathbb{R}[f]$:
   $g_1 \in \mathbb{R}[f] \Leftrightarrow \exists P_1 \in \mathbb{R}[X] / g_1 = P_1(f)$
   $g_2 \in \mathbb{R}[f] \Leftrightarrow \exists P_2 \in \mathbb{R}[X] / g_2 = P_2(f)$
   Alors :
   $$\alpha g_1 + g_2 = \alpha P_1(f) + P_2(f) = (\alpha P_1 + P_2)(f) \text{ avec } \alpha P_1 + P_2 \in \mathbb{R}[X]$$
   donc $\alpha g_1 + g_2 \in \mathbb{R}[f]$.

   Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[f] \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$

2. On note $\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}$. La question est la même que précédemment :
   - Par définition, $\Gamma(f) \subset \mathcal{L}(E)$.
   - L'endomorphisme nul noté $0_{\mathcal{L}(E)}$ appartient à $\Gamma(f)$ car il commute avec f.
   - $\forall (g_1, g_2) \in \Gamma^2(f), \forall \alpha \in \mathbb{R}$, montrons que $\alpha g_1 + g_2 \in \Gamma(f)$:
   $g_1 \in \Gamma(f) \Leftrightarrow g_1 \circ f = f \circ g_1$
   $g_2 \in \Gamma(f) \Leftrightarrow g_2 \circ f = f \circ g_2$
   Alors :
   $$(\alpha g_1 + g_2) \circ f = \alpha g_1 \circ f + g_2 \circ f = \alpha f \circ g_1 + f \circ g_2 = f \circ (\alpha g_1 + g_2) \text{ car } g_1, g_2 \in \Gamma(f)$$
   donc $\alpha g_1 + g_2 \in \Gamma(f)$.

   Conclusion : $\boxed{\Gamma(f) \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{L}(E)}$

3. *Montrons que* $\Gamma(f) = \mathbb{R}[f]$:
   a) *Montrons que* $\mathbb{R}[f] \subset \Gamma(f)$ *:*
   Soit $g \in \mathbb{R}[f]$, alors : $\exists (a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / g = a_0 f^0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n$.
   Donc :
   $$\begin{aligned} g \circ f &= (a_0 f^0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n) \circ f = a_0 f + a_1 f^2 + \cdots + a_n f^{n+1} \\ &= f \circ (a_0 f^0 + a_1 f + \cdots + a_n f^n) = f \circ g \end{aligned}$$
   On a donc bien : $g \in \Gamma(f)$.

Conclusion : $\boxed{\mathbb{R}[f] \subset \Gamma(f)}$

b) *Montrons que* $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}[f]$ *:*
Rappelons qu'il existe par hypothèse un vecteur totalisateur v pour f. Alors, d'après la partie II, nous savons que $(v, f(v), \cdots, f^{d-1}(v))$ est une base de E.

Soit $g \in \Gamma(f)$. Autrement dit, g commute avec f.
Par hypothèse,

$$\forall x \in E,\ \exists!(a_0, \cdots, a_{d-1}) \in \mathbb{R}^d / x = a_0 v + \cdots + a_{d-1} f^{d-1}(v) = Q(f)(v)$$

où on a posé : $Q(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{d-1} X^{d-1} \in \mathbb{R}[X]$.
Alors :

$$\begin{aligned} g(x) &= a_0 g(v) + \cdots + a_{d-1} g[f^{d-1}(v)] \\ &= a_0 g(v) + \cdots + a_{d-1} f^{d-1}[g(v)] \text{ car } g \in \Gamma(f) \Rightarrow f^k \circ g = g \circ f^k, \forall k \in \mathbb{N} \\ &= [Q(f)](g(v)) \end{aligned}$$

Or $g(v) \in E$ donc $\exists!(b_0, \cdots, b_{d-1}) \in \mathbb{R}^d / g(v) = b_0 v + \cdots + b_{d-1} f^{d-1}(v) = P(f)(v)$ où on a posé : $P(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_{d-1} X^{d-1} \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$.
Dès lors :

$$g(x) = Q(f)[P(f)(v)] = Q(f) \circ P(f)(v) = P(f) \circ Q(f)(v) = P(f)[Q(f)(v)] \text{ car } P(f) \circ Q(f) = Q(f) \circ P(f)$$

Donc $\forall x \in E$, $g(x) = P(f)(x)$ puisque $x = Q(f)(v)$...

Cela permet d'écrire que $g = P(f)$ où $P \in \mathbb{R}_{d-1}[X]$ et donc que $g \in \mathbb{R}[f]$
Conclusion : $\boxed{\Gamma(f) \subset \mathbb{R}[f]}$

Conclusion : $\boxed{\Gamma(f) = \mathbb{R}[f]}$

4. *Application* : Déterminons l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A_1 de la question II.2). Notons f_1 l'endomorphisme associé. On nous demande en fait de déterminer $\Gamma(f_1)$, l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec f_1...
Or $\Gamma(f_1) = \mathbb{R}[f_1]$.
Il suffit donc de déterminer $\mathbb{R}[f_1] = \{g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) / \exists P \in \mathbb{R}[X], g = P(f)\}$

On se souvient que A_1 est nilpotente d'ordre 3 donc $f_1^n = 0$, $\forall n \geq 3$.
Dès lors, $g \in \mathbb{R}[f_1] \Leftrightarrow \exists(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 / g = a_0 id + a_1 f_1 + a_2 f_1^2$.

Ce qui s'écrit matriciellement $B = a_0 I + a_1 A_1 + a_2 A_1^2$ où $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(g)$.

D'où

$$\begin{aligned}
B \text{ commute avec } A_1 &\Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 / B = a_0 I + a_1 A_1 + a_2 A_1^2 \\
&\Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 / \\
&\qquad B = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_1 & -a_1 \\ -2a_1 & -a_1 & a_1 \\ -2a_1 & -a_1 & a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2a_2 & 2a_2 \\ 0 & -2a_2 & 2a_2 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \exists (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3 / \boxed{B = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & -a_1 \\ -2a_1 & a_0 - a_1 - 2a_2 & a_1 + 2a_2 \\ -2a_1 & -a_1 - 2a_2 & a_0 + a_1 + 2a_2 \end{pmatrix}}
\end{aligned}$$

Problème 2 : Agro-Véto, épreuve A, 2013

Lu dans le rapport de jury : « *Ce problème avait pour objet l'étude de la fonction sinus cardinal. La partie 1 portait notamment sur l'étude de ses variations et limites en vue d'obtenir l'allure de la courbe. La seconde partie traitait des dérivées successives de f, et visait en particulier à prouver le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de f. Enfin la dernière partie avait pour but d'écrire les dérivées successives de f comme produits des fonctions sinus et cosinus par des polynômes à coefficients rationnels.*
Dans l'ensemble les premières questions de la première partie ont été traitées dans la plupart des copies. Les questions suivantes ont mis en évidence le fait que la différence entre $\mathcal{C}^1$ et dérivable n'était pas acquise pour tout le monde. »

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et } f(0) = 1.$$

1. a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas, donc est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f'(x) = \dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \text{ ; et pour tout } x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette question est sans surprise et bien traitée dans la grande majorité des copies. On regrettera toutefois une certaine tendance à utiliser l'expression « comme composée de fonctions usuelles » comme une formule magique servant à répondre à toutes les questions dont le but est de prouver la continuité, la dérivabilité ou le caractère $\mathcal{C}^1$ d'une fonction. Il n'était bien entendu pas question de l'utiliser ici, f étant un produit, soit un quotient de deux fonctiosn dont le dénominateur ne s'annule pas.* »

b) *La rédaction rapide :* Il suffit de donner un développement limité à l'ordre 1 de f en 0, ce qui est immédiat si on connaît le développement limité de la fonction sin :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \circ(x^3)}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \circ(x^2) = 1 + \circ(x)$$

on en déduit immédiatement que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$ donc elle est continue en 0.
Par ailleurs, f admet un D.L. à l'ordre 1 au voisinage de 0 donc $\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0}$.

La rédaction « pédestre » : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = 1 = f(0)$ donc $\boxed{f \text{ est continue en } 0}$.

On a : $f'(x) \underset{x\to 0}{=} \dfrac{x\left(1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)\right)}{x^2} = -\dfrac{x}{3} + o\left(x^2\right)$.
On en déduit que : $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.

La fonction f est continue (car $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$, et continue en 0, donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.
f est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable (car $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = 0$.
On en déduit, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, que :

$$\boxed{f \text{ est dérivable en 0 et } f'(0) = 0.}$$

De plus, f' étant continue en 0 :

$$\boxed{f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Le début de cette question était sans difficulté pour les candidats maîtrisant les développements limités, mais on déplore tout de même trop de sommes d'équivalents. Par contre, le caractère $\mathcal{C}^1$ a posé de nombreux problèmes. Certains candidats l'ont prouvé « à la main » quand d'autres (relativement rares) ont pensé à utiliser le théorème de la limite de la dérivée (ou théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$). Notons que ce théorème possède des hypothèses relativement contraignantes qu'il est important de vérifier avant de l'utiliser. »*

c) i. La fonction g comme somme et produit de fonctions dérivables est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g'(x) = \cos(x) - x\sin(x) - \cos(x) = -x\sin(x).$$

On a donc en particulier sur $[0, \pi]$:

x	0		π
$-x$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$+$	0
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	0	$\searrow$	$-\pi$
$g(x)$	0	$-$	

Or pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$ et $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $g(x)$.

x	0		π
$f'(x)$	0	$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	0

Lu dans le rapport de jury : *« L'étude du signe de g et des variations de f sur $[0, \pi]$ est de niveau terminale, mais pose malgré tout des soucis à quelques candidats. L'étude complète des variations de f est bien moins souvent traitée rigoureusement, et a donné lieu à des erreurs parfois grossières, notamment au sujet d'une hypothétique périodicité de f. »*

ii. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$: $x\cos(x) = \sin(x) \Longleftrightarrow g(x) = 0$.

– Cas n impair :

x	$n\pi$		$(n+1)\pi$
$-x$		$-$	
$\sin(x)$	0	$-$	0
$g'(x)$	0	$+$	0
$g(x)$	$-n\pi$	$\nearrow$	$(n+1)\pi$

– Cas n pair :

x	$n\pi$		$(n+1)\pi$
$-x$		$-$	
$\sin(x)$	0	$+$	0
$g'(x)$	0	$-$	0
$g(x)$	$n\pi$	$\searrow$	$-(n+1)\pi$

D'après les tableaux de variation ci-dessus, on peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $g(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in [n\pi, (n+1)\pi]$. De plus :

– Cas n impair :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

d'où :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	0

– Cas n pair :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

d'où :

x	$n\pi$		x_n		$(n+1)\pi$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

d) Pour tout $x > 0$, $\left|\dfrac{\sin(x)}{x}\right| \leq \dfrac{1}{x}$. Or : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| = 0$ d'où :

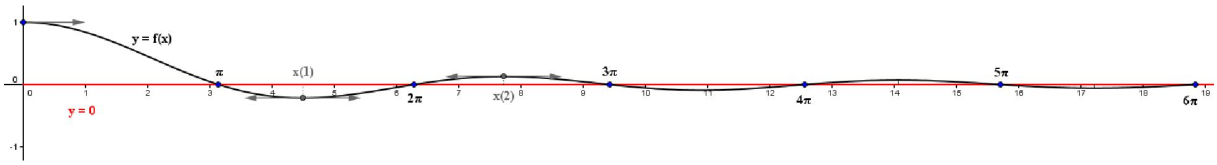
$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Cette limite est très classique et a sans aucun doute été traitée dans toutes les classes de métropole et d'outre-mer, mais 35% des candidats ne répondent pas correctement. Quant à l'interprétation en terme de représentation gra-*

phique, elle n'est bien traitée que dans un tiers des copies. »

$$\boxed{\text{La courbe représentative de } f \text{ admet donc en } +\infty \text{, une asymptote d'équation } y = 0.}$$

e)



Lu dans le rapport de jury : *« A peine un tiers des candidats récupèrent des points sur une courbe dont seule l'allure était demandée, et c'est dommage. Il est souhaitable que tous les éléments permettant de tracer la courbe (asymptote, tangentes, valeurs remarquables) figurent sur le dessin. »*

2. a) Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$:
La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. ***Conclusion*** : $\boxed{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)}$.

b) <u>Initialisation</u> : Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^{0+1}} \int_0^x u^0 \cos^{(0)}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x} \int_0^x \cos(u)\,\mathrm{d}u &= \frac{1}{x}\left[\sin(u)\right]_{u=0}^{u=x} \\ = \frac{1}{x}\left(\sin(x) - \sin(0)\right) &= \frac{\sin(x)}{x} = f(x) = f^{(0)}(x) \end{aligned}$$

La propriété est donc vraie pour $n = 0$.
<u>Hérédité</u> : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f^{(n)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u$.

Démontrons que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^{n+1} \cos^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u$.

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $u \longmapsto u^n \cos^{(n)}(u)$ est continue sur $[0, x]$, donc la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, de dérivée la fonction $x \longmapsto x^n \cos^{(n)}(x)$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{x^{n+1}} \times x^n \cos^{(n)}(x)$, d'où :
$f^{(n+1)}(x) = -\dfrac{n+1}{x^{n+2}} \displaystyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{x} \cos^{(n)}(x)$.
De plus, les fonctions : $u \longmapsto u^{n+1}$ et $u \longmapsto \cos^{(n)}(u)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$, donc en intégrant par parties, on a :

$$\begin{aligned} \int_0^x u^{n+1} \cos^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u &= \left[u^{(n+1)} \cos^{(n)}(u)\right]_{u=0}^{u=x} - \int_0^x (n+1) u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u \\ &= x^{n+1} \cos^{(n)}(x) - (n+1) \int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u \end{aligned}$$

On en déduit que :
$\dfrac{1}{x^{n+2}}\displaystyle\int_0^x u^{n+1}\cos^{(n+1)}(u)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x}\cos^{(n)}(x) - \dfrac{n+1}{x^{n+2}}\displaystyle\int_0^x u^n\cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u = f^{(n+1)}(x).$
La propriété est donc héréditaire à partir de $n=0$;
Conclusion :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\ :\ f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n\cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« La récurrence est généralement bien initialisé, et la dérivation de l'hypothèse de récurrence souvent juste, mais les candidats ayant vu et correctement posé l'intégration par parties sont beaucoup moins nombreux. »*

c) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$. Alors :
$\dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x u^n\cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u = \dfrac{1}{x^{n+1}}\cos^{(n)}(0)\left[\dfrac{u^{n+1}}{n+1}\right]_{u=0}^{u=x} = \dfrac{1}{x^{n+1}}\cos^{(n)}(0)\times\dfrac{x^{n+1}}{n+1}.$
Donc :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\ :\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n\cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Cette question ne présentait pas de difficulté particulière. »*

d) Soient $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\begin{aligned}\left|f^{(n)}(x)-\frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| &= \left|\frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n\cos^{(n)}(u)\,\mathrm{d}u - \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n\cos^{(n)}(0)\,\mathrm{d}u\right| \\ &= \frac{1}{x^{n+1}}\left|\int_0^x u^n\,\left(\cos^{(n)}(u)-\cos^{(n)}(0)\right)\,\mathrm{d}u\right|,\ \text{car } x>0.\end{aligned}$$

On en déduit que :
$\left|f^{(n)}(x)-\dfrac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x \left|u^n\,\left(\cos^{(n)}(u)-\cos^{(n)}(0)\right)\right|\,\mathrm{d}u$ car $0<x$, d'où :
$\left|f^{(n)}(x)-\dfrac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \dfrac{1}{x^{n+1}}\displaystyle\int_0^x u^n\left|\cos^{(n)}(u)-\cos^{(n)}(0)\right|\,\mathrm{d}u$, car $u\geq 0$ sur $[0,x]$.

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\,,\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*\,,\ \left|f^{(n)}(x)-\frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}}\int_0^x u^n\left|\cos^{(n)}(u)-\cos^{(n)}(0)\right|\,\mathrm{d}u.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« La linéarité de l'intégrale ne pose pas de problèmes, mais l'inégalité triangulaire en pose plus souvent, avec souvent un recours injustifié à l'inégalité triangulaire inversée. De plus, l'ordre des bornes, nécessaire pour appliquer l'inégalité triangulaire, n'est que rarement vérifié. »*

e) Soit $n\in\mathbb{N}$. Pour tout $u\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\cos^{(n)}$ est dérivable (donc continue) sur $[0,u]$, donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]0,u[$ tel que :

$$\cos^{(n)}(u)-\cos^{(n)}(0) = \cos^{(n+1)}(c)(u-0)$$

Soit

$$|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)| = |\cos^{(n+1)}(c)| \cdot |u - 0|$$

Or : $\left|\cos^{(n)}(c)\right| \in \{|\cos(c)|, |\sin(c)|\}$, donc $\left|\cos^{(n)}(c)\right| \leq 1$, d'où :

$$\left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq |u|.$$

Or $u > 0$, donc : $\left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq u$.

Enfin, l'inégalité étant trivialement vraie pour $u = 0$, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall u \in \mathbb{R}_+\,,\ \left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \leq u.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Très peu de candidats ont pensé à appliquer le théorème des accroissements finis, et plus rarement encore sont ceux qui ont mené à terme la question. »*

f) On a donc pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left|\cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0)\right| \mathrm{d}u \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \times u \,\mathrm{d}u.$$

Or : $\displaystyle\int_0^x u^{n+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{u^{n+2}}{n+2}\right]_{u=0}^{u=x} = \frac{x^{n+2}}{n+2}$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*\,,\ \left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| \leq \frac{x}{n+2}.}$$

g) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n+2} = 0$, d'où : $\displaystyle\lim_{x\to0^+} \left|f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}\right| = 0$, et donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} :\ \lim_{x\to0^+} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}.}$$

Lu dans le rapport de jury : *« Une grosse moitié des candidats a vu le lien avec les questions précédentes, qu'elles aient été traitées ou non. »*

h) Nous avons démontré que f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$. On peut donc affirmer que la fonction $f^{(1)}$ est continue sur $[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus : $\displaystyle\lim_{x\to0} f^{(2)}(x) = \frac{\cos^{(2)}(0)}{3}$.

Donc, d'après le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$, $f^{(1)}$ est dérivable en 0 avec $f^{(2)}(0) = \dfrac{\cos^{(2)}(0)}{3}$ et $f^{(2)}$ est continue en 0.

Enfin, pour tout $x \in [0, +\infty[$: $\cos^{(2)}(x) = (-\sin)'(x) = -\cos(x)$, donc : $\cos^{(2)}(0) = -1$.

En conclusion :

$$\boxed{f \text{ est deux fois dérivable en 0, avec } f^{(2)}(x) = -\frac{1}{3} \text{ et } f \text{ est de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } [0, +\infty[.}$$

On raisonne ensuite par récurrence. En particulier, l'hérédité se démontre de façon analogue à la question précédente en appliquant le théorème de prolongement $\mathcal{C}^1$ à la fonction $f^{(n)}$. On en déduit que :

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [0, +\infty[\text{ et } f^{(n)}(0) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}.}$$