MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire

Problème 1 :

Soit d un entier naturel tel que $d \geq 2$. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension d et $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E. Soit $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices d'ordre d à coefficients dans $\mathbb{R}$.

Préliminaires

Soient f, $g \in \mathcal{L}(E)$ tels que : $f \circ g = g \circ f$.
On rappelle qu'on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est **stable** par f si, et seulement si,

$$f(F) \subset F$$

1. a) Montrer que l'image de g est stable par f.
   b) Montrer que le noyau de g est stable par f.

2. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_d \in \mathbb{R}$ et $M_d = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{d-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{d-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \lambda_d^2 & \cdots & \lambda_d^{d-1} \end{pmatrix}$

   a) Supposons pour cette question que $d = 2$. Montrer que M_2 est inversible si $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

   b) On suppose désormais $d \geq 2$ et on pose $P(X) = X^{d-1} + \displaystyle\sum_{k=0}^{d-2} p_k X^k$ où $p_k \in \mathbb{R}$.

   Prouver que la matrice M_d a même rang que la matrice M' de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par :

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-2} & P(\lambda_1) \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-2} & P(\lambda_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-2} & P(\lambda_d) \end{pmatrix}$$

   c) On suppose toujours que $d \geq 2$. En déduire que la matrice M_d a même rang que la matrice M''_d de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ définie par :

$$M''_d = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \cdots & \lambda_1^{d-2} & 0 \\ 1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2^{d-2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & \lambda_d & \cdots & \lambda_d^{d-2} & \displaystyle\prod_{k=1}^{d-1}(\lambda_d - \lambda_k) \end{pmatrix}$$

   d) Montrer par récurrence sur d que M est inversible si, et seulement si, les nombres réels $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_d$ sont deux à deux distincts.

Partie I

On précise qu'un vecteur v de E est dit *totalisateur* de f si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que la famille $\mathcal{F} = \{v, f(v), \cdots, f^N(v)\}$ est *une famille génératrice de* E. Autrement dit si :

$$\forall x \in E, \exists (a_0, a_1, \cdots, a_N) \in \mathbb{R}^{d+1} / x = a_0 v + a_1 f(v) + \cdots + a_N f^N(v)$$

1. On suppose ici que $d = 2$ et que f admet deux valeurs propres λ_1 et λ_2 distinctes.
   a) Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}' = (u_1, u_2)$ dans laquelle f est représentée par une matrice diagonale.
   b) Soit $v = u_1 + u_2$. Montrer que v est un vecteur totalisateur pour f.

2. On revient dans le cas général où $d \geq 2$. Montrer que si f a d valeurs propres distinctes, alors il existe un vecteur v totalisateur pour f.

3. *Exemple* : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de E.
   a) Monter que A admet trois valeurs propres distinctes.
   b) Déterminer chacun des sous-espaces vectoriels propres de A.
   A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
   c) Déterminer une base $\mathcal{B}''$ telle que f est représenté par une matrice $A'' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}''}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \end{pmatrix}$ où $(b_0, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^3$

Partie II

1. On suppose qu'il existe $v \in E / f^d(v) = 0$ et $f^{d-1}(v) \neq 0$. Montrer que $\mathcal{F} = \left\{v, f(v), \cdots, f^{d-1}(v)\right\}$ est libre.

2. *Exemple* : Soit $A_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Montrer que A_1 est nilpotente (c'est-à-dire : $\exists d \in \mathbb{N}^* / A_1^d = 0$ et $A_1^{d-1} \neq 0$).
   b) Déterminer $u \in \mathbb{R}^3 / f^2(u) \neq 0$ et $f^3(u) = 0$.
   c) Montrer que u est un vecteur totalisateur pour f.
   d) Donner la matrice $A_1' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$ où $\mathcal{B}' = (u, f(u), f^2(u))$ et donner une relation matricielle entre A_1 et A_1'.

Partie III

Soit f un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe au moins un vecteur totalisateur v pour f.

1. Montrer que $\mathbb{R}[f] = \{g \in \mathcal{L}(E) / \exists P \in \mathbb{R}[X], g = P(f)\}$ est un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2. On note $\Gamma(f) = \{g \in \mathcal{L}(E) / g \circ f = f \circ g\}$.
   Montrer que $\Gamma(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

3. On souhaite montrer que $\Gamma(f) = \mathbb{R}[f]$:
   a) Montrer que $\mathbb{R}[f] \subset \Gamma(f)$.
   b) Montrer que $g \in \Gamma(f) \Rightarrow f^k \circ g = g \circ f^k, \forall k \in \mathbb{N}$
   c) Montrer que $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}[f]$.
   d) En déduire que $\Gamma(f) = \mathbb{R}[f]$ et que $(f^0, f, \cdots, f^{d-1})$ est une base de $\mathbb{R}[f]$.

4. *Application* : Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec la matrice A_1 de la question II.2).

Problème 2 :

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , \ f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{et } f(0) = 1.$$

1. Représentation graphique de la fonction f.
   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer f' sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) Montrer que f est continue en 0, dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
   L'application f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$?
   c) Afin d'étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+$,
   nous introduisons la fonction $g : x \longmapsto x\cos(x) - \sin(x)$.
      i. Étudier le signe de g sur $[0, \pi]$ puis les variations de f sur $[0, \pi]$.
      ii. Soit n appartenant à $\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $(\mathcal{E}_n) : x\cos(x) = \sin(x)$, $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ admet une unique solution x_n, et en déduire le signe de g sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ puis les variations de f sur $[n\pi, (n+1)\pi]$ (*Une discussion sur la parité de n intervient*).
   d) Étudier la limite de f en $+\infty$ et préciser la nature de la branche infinie.
   e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, 6\pi]$.

2. Etude des dérivées successives de f sur $\mathbb{R}_+$.
   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

✐ *Nous rappelons que pour tout entier naturel n, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f se note $f^{(n)}$.*

   b) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , \ f^{(n)}(x) = \tfrac{1}{x^{n+1}} \textstyle\int_0^x u^n \cos^{(n)}(u)\, \mathrm{du}.$$
   c) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, calculer : $\displaystyle \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \cos^{(n)}(0)\, du$.
   L'expression attendue dépend de $cos^{(n)}(0)$ qu'on ne cherchera pas à évaluer.

d) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, x appartenant à $\mathbb{R}_+^*$, montrer que :

$$\left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x u^n \left| \cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0) \right| \, \mathrm{d}u.$$

e) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+ , \ \left| \cos^{(n)}(u) - \cos^{(n)}(0) \right| \leq u.$$

f) En déduire que pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* , \ \left| f^{(n)}(x) - \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1} \right| \leq \frac{x}{n+2}.$$

g) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$, montrer que : $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = \frac{\cos^{(n)}(0)}{n+1}$.

h) Montrer que f est deux fois dérivable en 0 et que : $f''(0) = -\dfrac{1}{3}$, puis montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Généraliser ce résultat en montrant que pour tout entier naturel n, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur $\mathbb{R}_+$. *Nous avons donc montré que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.*

FIN