MATHEMATIQUES
Analyse et Algèbre linéaire

Problème :

Dans ce problème E désigne l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On appelle polynôme toute fonction polynômiale de $\mathbb{R}$ dans lui-même; on note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et, pour tout entier naturel d, on note $\mathbb{R}_d[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à d. On rappelle que, par convention, le degré du polynôme nul est fixé à $-\infty$.

Pout tout élément f de E on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$$

Première partie : exemples
Soit w un réel; on note f_w l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\, f_w(x) = e^{wx}$ et on note g l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, g(x) = \begin{cases} x \text{ si } x \in [0,1] \\ 2-x \text{ si } x \in [1,2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer pour tout w réel la fonction $T(f_w)$ en prenant soin de distinguer le cas $w = 0$.

2. Soit $C = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormal du plan, $\mathcal{G}$ la courbe représentative de g dans le repère C et Δ la droite d'équation $x = 1$ dans le repère C
   a) Tracer $\mathcal{G}$ et montrer que Δ est un axe de symétrie de $\mathcal{G}$.

   b) Déterminer la fonction $T(g)$.
   Remarque : On prendra soin de distinguer six cas, selon que $x \leq -1$, $-1 \leq x \leq 0$, $0 \leq x \leq 1$, $1 \leq x \leq 2$, $2 \leq x \leq 3$ et $x \geq 3$...

   c) Tracer sommairement $\mathcal{G}'$ la courbe représentative de $T(g)$ dans le repère C.

   d) Déterminer un axe de symétrie de $\mathcal{G}'$.

   e) La fonction $T(g)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Deuxième partie : Etude de T

1. Montrer que, pour tout élément f de E l'application $T(f)$ appartient à E et est dérivable sur $\mathbb{R}$. Déterminer la fonction dérivée de $T(f)$ et montrer que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

2. On note T l'application de E dans lui-même définie par $f \longmapsto T(f)$
   a) Rappeler pourquoi T est un endomorphisme de E.
   b) T est-elle une application surjective ?

3. On suppose que f est une application de E, bornée sur $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que $T(f)$ est également une application bornée sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer qu'il existe un réel K tel que :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R},\ |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x-y|$$
4. Montrer que si f est une fonction périodique de E, alors $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur $\mathbb{R}$.

5. Déterminer la parité de $T(f)$ en fonction de la parité de f.

Troisième partie : Étude de restrictions

1. Soit w un réel non nul. On note φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 les fonctions de E définies par :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = cos(wx),\ \varphi_2(x) = sin(wx),\ \varphi_3(x) = xcos(wx) \text{ et } \varphi_4(x) = xsin(wx).$$

   On note F_w le sous-espace vectoriel de E engendré par φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4.

   a) On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$. Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de F_w.

   b) Montrer que pour tout a et b réels, $sin(a+b) - sin(a-b) = 2cosasinb$ et $cos(a-b) - cos(a+b) = 2sinasinb$.

   c) Calculer $T(\varphi_1), \cdots, T(\varphi_4)$ et en déduire que $T(F_w) \subset F_w$.

2. Dans la suite on note M_w la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la restriction T_w de T à F_w définie par : $T_w(f) = T(f)$, $\forall f \in F_w$.
   a) Montrer que le rang de M_w vaut 2 ou 4 selon la valeur de w.

   b) Déterminer le noyau de T_w selon la valeur de w.

   c) L'endomorphisme T_w est-il injectif ?

3. Soit (d,n) un couple d'entiers naturels non nuls ; on note ε_n le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon_n(x) = x^n$ et ε_0 la fonction constante égale à 1. On rappelle que $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, ...\varepsilon_d)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$.

   a) Montrer que $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$

   Dans la suite, on note A_d la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la restriction, Θ_d, de T à $\mathbb{R}_d[X]$ définie par :
   $$\Theta_d : \begin{cases} \mathbb{R}_d[X] \longrightarrow \mathbb{R}_d[X] \\ f \longmapsto T(f) \end{cases}$$

b) Montrer que $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ?

c) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de Θ_d.

d) Dans le cas où $d \geq 2$, l'endomorphisme Θ_d est-il diagonalisable ?

e) L'endomorphisme Θ_d est-il bijectif ?

Quatrième partie : Étude d'une transformée

On note g l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$$

On rappelle que pour tout x réel, on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel dont le cube vaut x.

1. Étude de la fonction g.
   a) Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g.
   b) Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et donner son tableau de variation.
   c) Montrer que $\mathcal{G}_1$, courbe représentative de g, admet une asymptote oblique dont on étudiera la position par rapport à la courbe $\mathcal{G}_1$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$.
   d) Tracer avec soin la courbe représentative de g ainsi que son asymptote oblique.

2. Étude de la fonction $T(g)$.
   a) Étudier la parité de $T(g)$.
   b) Déterminer les variations de $T(g)$.
   c) Calculer la valeur de $T(g)(0)$.

FIN