MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire

Problème :

Pout tout élément f de E on note $T(f)$ l'application de $\mathbb{R}$ dans lui-même définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T(f)(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$$

Première partie : exemples

1. On cherche à déterminer pour tout w réel la fonction $T(f_w)$ où f_w est l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f_w(x) = e^{wx}$.

   Premier cas : $w = 0$. $f_w = 1$ et alors $T(f_w) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} 1dt = (x+1) - (x-1) = 2,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

   Second cas : $w \neq 0$. Alors, par définition :

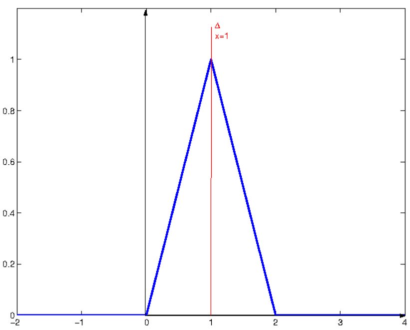
$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ T(f_w)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} e^{wt}dt = \left[\frac{e^{wt}}{w}\right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{e^{w(x+1)} - e^{w(x-1)}}{w} = \frac{e^{wx+w} - e^{wx-w}}{w} \\ &= \frac{e^{w} - e^{-w}}{w} e^{wx}\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{T(f_0) \text{ est la fonction constante égale à 2 et si } w \neq 0,\ T(f_w) = \dfrac{e^{w} - e^{-w}}{w} f_w}$

   ✐ Lu dans le Rapport de Jury : *Le cas particulier où ω est nul est souvent oublié avec, heureusement très rare, quelques primitives farfelues et quelques manipulations abusives des exponentielles (exponentielles du produit égale au produit des exponentielles)*

2. Soit $C = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan.

   a) *Traçons $\mathcal{G}$ et montrons que Δ est un axe de symétrie de $\mathcal{G}$.*



   Pour montrer que Δ est un axe de symétrie, notons en premier lieu que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R}$, lui-même symétrique par rapport à $x = 1$.

Montrons que $h : x \longmapsto g(1+x)$ est paire ou encore : $\forall x \geq 0$ $g(1-x) = g(1+x)$
- Si $x \in [0,1]$, $1+x \in [1,2]$ et $1-x \in [0,1]$. Donc : $g(1-x) = 1-x$ et $g(1+x) = 2-(1+x) = 1-x$, soit $h(-x) = h(x)$
- Si $x > 1$, $1+x > 2$ et $1-x < 0$. Donc : $g(1-x) = 0 = g(1+x)$, soit $h(-x) = h(x)$

Conclusion : $\boxed{h \text{ est paire ou encore } \Delta \text{ est un axe de symétrie de } \mathcal{G}}$

b) *Déterminons la fonction $T(g)$.*
Distinguons six cas (Penser à observer la figure 1 qui précède) :

➤ Si $x \leq -1$, on a : $x-1 \leq x+1 \leq 0$ et donc $T(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} 0dt = 0$

➤ Si $-1 \leq x \leq 0$, on a : $x-1 \leq 0 \leq x+1 \leq 1$. D'où :

$$\begin{aligned} T(g)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt = \int_0^{x+1} tdt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{x+1} = \frac{1}{2}(x+1)^2 \end{aligned}$$

➤ Si $0 \leq x \leq 1$, on a : $x-1 \leq 0 \leq 1 \leq x+1 \leq 2$. D'où :

$$\begin{aligned} T(g)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^{x+1} 2-tdt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^{x+1} = \frac{1}{2} + 2(x+1) - \frac{(x+1)^2}{2} - 2 + \frac{1}{2} \\ &= 1 + 2x - \frac{x^2+2x+1}{2} = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

➤ Si $1 \leq x \leq 2$ on a : $0 \leq x-1 \leq 1 \leq 2 \leq x+1$. D'où :

$$\begin{aligned} T(g)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt = \int_{x-1}^1 tdt + \int_1^2 2-tdt \\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^1 + \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2} + 4 - 2 - 2 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

➤ Si $2 \leq x \leq 3$, on a : $1 \leq x-1 \leq 2 \leq x+1$. D'où :

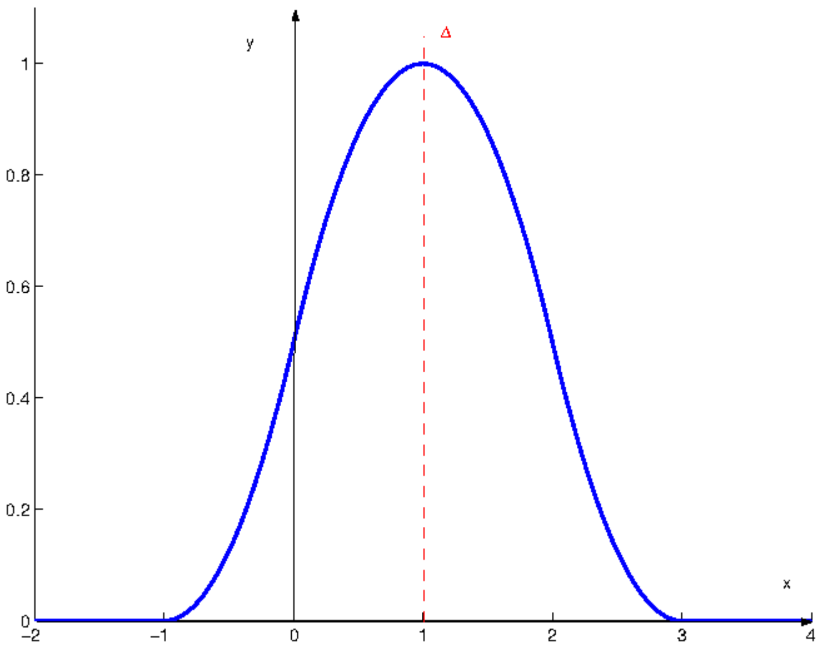
$$\begin{aligned} T(g)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} g(t)dt = \int_{x-1}^2 2-tdt \\ &= \left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^2 = 4 - 2 - 2(x-1) + \frac{(x-1)^2}{2} \\ &= 4 - 2x + \frac{x^2-2x+1}{2} = \frac{9}{2} - 3x + \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

➤ Si $x \geq 3$, on a : $2 \leq x-1 \leq x+1$ et donc $T(g)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} 0dt = 0$

$$\textbf{\textit{Conclusion}} : \boxed{T(g) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ \dfrac{1}{2}(x+1)^2 & \text{si } x \in [-1,0] \\ \dfrac{1}{2} + x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \in [0,2] \\ \dfrac{9}{2} - 3x + \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{(x-3)^2}{2} & \text{si } x \in [2,3] \\ 0 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}}$$

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *Le calcul de $T(g)$ est le plus souvent inexact (pas plus de 20% de bonnes réponses), les candidats n'ont pas vu que l'intégration se passait sur le segment $[x-1, x+1]$...*

c) *Traçons sommairement $\mathcal{G}'$ la courbe représentative de $T(g)$ dans le repère C.*



Remarque : On ne demande pas ici d'étude détaillée de la fonction. On se contentera de vérifier la continuité de $T(g)$ qui sera prouvée en II/1.

d) *Montrons que $(x = 1)$ est un axe de symétrie de $\mathcal{G}'$* : Comme en 2.a) il suffit de vérifier que $h_2 : x \longmapsto T(g)(1+x)$ est paire, ou encore que $T(g)(1-x) = T(g)(1+x)$...

➤ Si $x \in [0,1]$, on a : $1 + x \in [1,2]$ et $1 - x \in [0,1]$ donc :

$$h_2(x) = T(g)(1+x) = \frac{1}{2} + (1+x) - \frac{(1+x)^2}{2} = \frac{3}{2} + x - \frac{1}{2}(1 + 2x + x^2) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

et

$$h_2(-x) = T(g)(1-x) = \frac{1}{2} + (1-x) - \frac{(1-x)^2}{2} = \frac{3}{2} - x - \frac{1}{2}(1 - 2x + x^2) = 1 - \frac{x^2}{2}$$

Soit $h_2(-x) = h_2(x)$

➤ <u>Si $x \in [1,2]$</u>, on a : $1 + x \in [2,3]$ et $1 - x \in [-1,0]$ donc :
$h_2(x) = T(g)(1+x) = \dfrac{(1+x-3)^2}{2} = \dfrac{(x-2)^2}{2}$
et
$h_2(-x) = T(g)(1-x) = \dfrac{(1-x+1)^2}{2} = \dfrac{(2-x)^2}{2}$
Soit $h_2(-x) = h_2(x)$

➤ <u>Enfin si $x > 2$</u>, on a : $1 + x > 3$ et $1 - x < -1$ donc $h_2(x) = T(g)(1+x) = 0 = T(g)(1-x) = h_2(-x)$

Conclusion : $\boxed{h_2 \text{ est paire ou encore } \Delta \text{ est un axe de symétrie de } \mathcal{G}'}$

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *Les questions sur $T(g)$ ont perturbé des candidats. Leurs réponses n'étant pas en accord avec la suite du problème, certains n'ont pas hésité à le signaler. A contrario, le silence des autres peut amener à penser qu'ils ne font pas de rapport entre l'exemple et le cas général*

e) *La fonction $T(g)$ est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?* Il est immédiat que $T(g)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux sur $\mathbb{R} \setminus \{-1,0,2,3\}$ car sur chacun des intervalles la fonction est de type polynomiale. Regardons la continuité de $T(g)''$ aux points d'abscisse -1, 0, 2 et 3 :
Si $x \leq -1$ alors $T(g)''(x) = 0$ et si $x \geq -1$, $T(g)'(x) = x+1$ et donc $T(g)''(x) = 1 \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{\text{Cette étude suffit pour conclure que } T(g) \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^2 \text{ sur } \mathbb{R}}$

Deuxième partie : Etude de T

1. *Montrons que, pour tout élément f de E l'application $T(f)$ appartient à E et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.*
   f étant continue sur $\mathbb{R}$, posons F une primitive de f.
   On a alors : $T(f)(x) = F(x+1) - F(x-1)$ avec F de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Par composition et somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ on a donc $\boxed{T(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$
   Par ailleurs, $\boxed{T(f)'(x) = F'(x+1) - F'(x-1) = f(x+1) - f(x-1), \forall x \in \mathbb{R}}$

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *Les candidats ne semblent faire aucune différence entre intégrale et primitive, et pourtant ils savent manipuler de telles fonctions $T(f)$, la dérivée de $T(f)$ est souvent exacte. La mise en forme des réponses est par contre douteuse, comme « une intégrale est continue, $T(f)$ est continue donc dérivable », le plus simple étant de revenir à l'expression de $T(f)$ à l'aide d'une primitive de f et la question tombe facilement*

2. On note T l'application de E dans lui-même définie par $f \longmapsto T(f)$
   a) T est un endomorphisme de E car c'est une application linéaire, propriété qui découle immédiatement de la linéarité de l'intégrale. Par ailleurs, nous venons de montrer que pour tout vecteur f de E son image $T(f)$ est dans E.
   Conclusion : $\boxed{T \text{ est un endomorphisme de } E}$

b) T n'est pas une application surjective car il existe des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas dérivables (penser à la fonction « valeur absolue »). Cette fonction n'admet pas d'antécédant par T puisque, d'après II/1. l'image de toute fonction de E est au moins de classe $\mathcal{C}^1$...

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *La surjectivité de T s'est souvent limitée à un rappel de la définition ou à des réponses farfelues. Un petit nombre, mais non négligeable de candidats a cependant mis clairement en évidence l'existence de fonctions continues non de classe $\mathcal{C}^1$... Les élèves de BCPST malgré leur petit nombre d'heures de maths, arrivent à réfléchir sur des concepts abstraits (☺ à noter... un compliment !)*

3. *On suppose que f est une application de E, bornée sur $\mathbb{R}$:*

a) *Montrons que $T(f)$ est également une application bornée sur $\mathbb{R}$:*
f est bornée sur $\mathbb{R}$ donc il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que pour tout t réel, on ait : $|f(t)| \leq M$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $|T(f)(x)| = |\displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt|$
Or ✐ $x - 1 \leq x + 1$ donc :
$|T(f)(x)| \leq \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} |f(t)|dt \leq \int_{x-1}^{x+1} Mdt = M\,(x + 1 - (x - 1)) = 2M$
Conclusion : $\boxed{T(f) \text{ est une application bornée sur } \mathbb{R}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Beaucoup de bonnes réponses sur $T(f)$ bornée* »

b) *Montrons qu'il existe un réel K tel que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}$, $|T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x - y|$:*
Sachant que $T(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, il est possible d'utiliser le Théorème des accroissements finis sur l'intervalle $[x, y] \subset \mathbb{R}$ en rappelant que $(T(f))'(t) = f(t + 1) - f(t - 1)$.
Dès lors : $\exists c \in]x, y[/T(f)(x) - T(f)(y) = (T(f))'(c) \cdot (x - y)$
Et par passage à la valeur absolue :

$$|T(f)(x) - T(f)(y)| = |(T(f))'(c)| \cdot |x - y| \leq \underset{t \in]x,y[}{sup} |(T(f))'(t)| \cdot |x - y|$$

or $|(T(f))'(t)| = |f(t + 1) - f(t - 1)| \leq |f(t + 1)| + |f(t - 1)| \leq 2M$.
Conclusion : $\boxed{\exists K = 2M \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall (x, y) \in \mathbb{R},\ |T(f)(x) - T(f)(y)| \leq K|x - y|}$

Lu dans le rapport de jury : « *Une volonté d'utiliser les accroissements finis, mais sans réelle majoration de la dérivée (pas plus de 3% des copies...)* »

4. *Montrons que si f est une fonction périodique de E, alors $T(f)$ est aussi une fonction périodique sur $\mathbb{R}$:*
Soit τ la période de la fonction f. On a par hypothèse : $f(t + \tau) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

– On commence par noter que l'ensemble de définition de $T(f)$ est égale à $\mathbb{R}$ et donc pour tout x dans l'ensemble de définition de $T(f)$, on a $x + \tau$ dans ce domaine.
– Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $T(f)(x + \tau) = \displaystyle\int_{x+\tau-1}^{x+\tau+1} f(t)dt$.
Dans cette intégrale, on effectue le changement de variable :

$$s = t - \tau = u(t) \text{ où } u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$$

Dès lors,

$$T(f)(x+\tau) = \int_{x-1}^{x+1} f(s+\tau)ds = \int_{x-1}^{x+1} f(s)ds \text{ (puisque } f \text{ de période } \tau)$$

Conclusion : $\boxed{T(f) \text{ est de même période que } f}$

5. *Déterminons la parité de $T(f)$ en fonction de la parité de f.*
   Commençons par noter que $T(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et donc que son ensemble de définition est symétrique par rapport à 0...
   Supposons que f est parire :
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $T(f)(-x) = \displaystyle\int_{-x-1}^{-x+1} f(t)dt.$
   Effectuons, comme nous le recommande l'énoncé, le changement de variable $u = -t$.
   ✐ Ce changement de variable est possible car la fonction changement de variable $\varphi : x \longmapsto -x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donc en particulier sur l'intervalle d'intégration $[-x-1, -x+1]$.
   On obtient : $T(f)(-x) = \displaystyle\int_{\varphi(-x-1)}^{\varphi(-x+1)} f(-u)(-du) = -\int_{x+1}^{x-1} f(u)du$ car f est paire.
   D'où $T(f)(-x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} f(u)du$

   Conclusion : $\boxed{\text{Si } f \text{ est paire alors } T(f) \text{ est paire}}$

   On montrerait de même que $\boxed{\text{si } f \text{ est impaire, alors } T(f) \text{ est impaire}}$.

Troisième partie : Étude de restrictions

1. Soit w un réel non nul. On note φ_1, φ_2, φ_3 et φ_4 les fonctions de E définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi_1(x) = cos(wx),\ \varphi_2(x) = sin(wx),\ \varphi_3(x) = xcos(wx) \text{ et } \varphi_4(x) = xsin(wx).$$

a) On note $\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$.

➤ La famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ est génératrice de F_w par définition.

➤ Montrons que cette famille est libre.
Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\lambda_4) \in \mathbb{R}^4 / \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \lambda_3\varphi_3 + \lambda_4\varphi_4 = 0$ (*)
(*)$\Leftrightarrow$ $\lambda_1 cos(wx) + \lambda_2 sin(wx) + \lambda_3 xcos(wx) + \lambda_4 xsin(wx) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

En particulier :

$$\begin{cases} \text{pour } x = 0 & \text{on a : } \lambda_1 = 0 \\ \text{pour } x = \dfrac{\pi}{w} & \text{on a : } -\lambda_3 \dfrac{\pi}{w} = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = 0 \\ \text{pour } x = \dfrac{\pi}{2w} & \text{on a : } \lambda_2 + \lambda_4 \dfrac{\pi}{2w} = 0 \\ \text{pour } x = -\dfrac{\pi}{2w} & \text{on a : } -\lambda_2 + \lambda_4 \dfrac{\pi}{2w} = 0 \end{cases}$$

Des deux dernières lignes, on conclut : $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$.
La famille $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$ est donc libre.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{B} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \text{ est une base de } F_w}$

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *Cette partie se passe dans un espace vectoriel de fonctions, espace peut-être trop abstrait pour des élèves de BCPST mais l'attitude des candidats face à la liberté des quatre fonctions est plutôt positive (problème bien posé suivi de quelques valeurs particulières) même si cela s'arrête vite (mauvais choix des valeurs particulières.)*

b) Pour montrer que pour tout a et b réels, $sin(a+b) - sin(a-b) = 2cosasinb$ et $cos(a-b) - cos(a+b) = 2sinasinb$, il suffit d'appliquer les formules trigonométriques au programme. La réponse est immédiate.

c) *Calculons* $T(\varphi_1)$, ..., $T(\varphi_4)$:
$\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} T(\varphi_1)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} cos(wt)dt = \left[\frac{sin(wt)}{w}\right]_{x-1}^{x+1} \\ &= \frac{sin(w(x+1)) - sin(w(x-1))}{w} = \frac{sin(wx+w)) - sin(wx-w))}{w} \\ &= \frac{2}{w}cos(wx)sin(w) = \frac{2sinw}{w}\varphi_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T(\varphi_2)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} sin(wt)dt = \left[-\frac{cos(wt)}{w}\right]_{x-1}^{x+1} \\
&= \frac{-\,cos(w(x+1)) + cos(w(x-1))}{w} = \frac{cos(wx-w)) - cos(wx+w))}{w} \\
&= \frac{2}{w} sin(wx)sin(w) = \frac{2sinw}{w}\varphi_2(x)
\end{aligned}$$

Pour $T(\varphi_3)(x) = \displaystyle\int_{x-1}^{x+1} tcos(wt)dt$ on effectue une intégration par parties en posant :

$$\begin{cases} u(t) = t, & u'(t) = 1 \\ v'(t) = cos(wt), & v(t) = \dfrac{sin(wt)}{w} \end{cases} \text{ avec } u, v \text{ de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
T(\varphi_3)(x) &= \left[t\frac{sin(wt)}{w}\right]_{x-1}^{x+1} - \frac{1}{w}\int_{x-1}^{x+1} sin(wt)dt \\
&= \frac{(x+1)sin(w(x+1)) - (x-1)sin(w(x-1))}{w} - \frac{1}{w}T(\varphi_2)(x) \\
&= \frac{x\big(sin(w(x+1)) - sin(w(x-1))\big) + sin(w(x+1)) + sin(w(x-1))}{w} \\
&\qquad - \frac{2sinw}{w^2}\varphi_2(x) \\
&= \frac{2xcos(wx)sinw + 2sin(wx)cosw}{w} - \frac{2sinw}{w^2}\varphi_2(x) \\
&= \frac{2sinw}{w}\varphi_3(x) + \big(\frac{2cosw}{w} - \frac{2sinw}{w^2}\big)\varphi_2(x)
\end{aligned}$$

De même, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}
T(\varphi_4)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} tsin(wt)dt = \left[-t\frac{cos(wt)}{w}\right]_{x-1}^{x+1} + \frac{1}{w}\int_{x-1}^{x+1} cos(wt)dt \\
&= \frac{-\,(x+1)cos(w(x+1)) + (x-1)cos(w(x-1))}{w} + \frac{1}{w}T(\varphi_1)(x) \\
&= \frac{x\big(cos(w(x-1)) - cos(w(x+1))\big) - cos(w(x+1)) - cos(w(x-1))}{w} \\
&\qquad + \frac{2sinw}{w^2}\varphi_1(x) \\
&= \frac{2xsin(wx)sinw - 2cos(wx)cosw}{w} + \frac{2sinw}{w^2}\varphi_1(x) \\
&= \frac{2sinw}{w}\varphi_4(x) + \big(\frac{2sinw}{w^2} - \frac{2cosw}{w}\big)\varphi_1(x)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} T(\varphi_1) = \dfrac{2sinw}{w}\varphi_1, \quad T(\varphi_2) = \dfrac{2sinw}{w}\varphi_2 \\ T(\varphi_3) = \dfrac{2}{w^2}(wcosw - sinw)\varphi_2 + \dfrac{2sinw}{w}\varphi_3 \\ T(\varphi_4) = \dfrac{2}{w^2}(sinw - wcosw)\varphi_1 + \dfrac{2sinw}{w}\varphi_4 \end{array}}$

Comme $T(\varphi_1) \in F_w$, $T(\varphi_2) \in F_w$, $T(\varphi_3) \in F_w$ et $T(\varphi_4) \in F_w$, on peut conclure :

$$\boxed{T(F_w) \subset F_w}.$$

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *Le calcul de l'image de T des 4 fonctions se passe plutôt bien (15% des candidats commettent des erreurs de calcul). Mais ensuite, soit nous trouvons des erreurs dans les formules trigonométriques, surtout des erreurs de signe, sans aucun calul intermédiaire, soit les candidats se contentent de voir les $T(\varphi)$ comme des combinaisons linéaires de $\varphi(x+1)$ ou $\varphi(x-1)$.*

2. a) On note M_w la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la restriction T_w de T à F_w définie par : $T_w(f) = T(f)$, $\forall f \in F_w$.
On a donc, au regard de la conclusion de la question III/1.b) encadrée ci-dessus :

$$M_w = \begin{pmatrix} \dfrac{2sinw}{w} & 0 & 0 & \dfrac{2(sinw - wcosw)}{w^2} \\ 0 & \dfrac{2sinw}{w} & \dfrac{2(wcosw - sinw)}{w^2} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2sinw}{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{2sinw}{w} \end{pmatrix}$$

✐ **Lu dans le Rapport de Jury** : *Les questions suivantes sur la matrice dépendant des calculs souvent inexacts de la question précédente, nous ont seulement montré, ce qui va se confirmer ensuite, que les candidats sont maladroits sur des questions simples...* ☹ *la forme simple de la matrice ne demande pas une copie de calculs pour son étude. Effectivement, le calcul facile de la matrice, même lorsqu'il est juste, amène des réponses sans fin sur son rang... elle est triangulaire supérieure.*

Déterminons le rang de M_w selon la valeur de w :

➤ Si w est un multiple de π. Posons $w = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, alors :

$$M_w = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\dfrac{2cosw}{w} \\ 0 & 0 & \dfrac{2cosw}{w} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec $cosw = cos(k\pi) = (-1)^k \neq 0$ donc $\dfrac{cosw}{w} \neq 0$.
D'où $\text{rg}M_w = 2$.

➤ Si w n'est pas un multiple de π.
Alors la matrice M_w est triangulaire supérieure sans valeur nulle sur sa diagonale. En conséquence, $\text{rg}M_w = 4$.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } w = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ alors } \text{rg}M_w = 2, \text{ sinon } \text{rg}M_w = 4}$

b) *Déterminons le noyau de T_w selon la valeur de w :*

➤ Si w est un multiple de π : On a $\text{rg}M_w = 2$ et donc, d'après la formule du rang, $\dim(\ker T_w) = 4 - 2 = 2$.
Il suffit alors d'observer la matrice pour noter que $T_w(\varphi_1) = 0 = T_w(\varphi_2)$.
Conclusion : $\boxed{\text{Si } w = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \text{ alors } \ker T_w = \text{Vect}\{\varphi_1, \varphi_2\}}$

➤ Si w n'est pas un multiple de π : On a $\text{rg}M_w = 4$ et toujours d'après la formule du rang, $\dim(\ker T_w) = 0$ (*Remarque* : On aurait aussi pu dire que dans ces conditions, M_w est inversible, ce qui signifie que T_w est bijectif et donc son noyau est réduit à $\{0\}$...)
Conclusion : $\boxed{\text{Si } w \text{ n'est pas un multiple de } \pi,\ \ker T_w = \{0\}}$

c) *L'endomorphisme T_w est-il injectif ?* C'est une conséquence immédiate de la question qui précède... « oui »si w n'est pas un multiple de π, « non »sinon...

3. Soit (d, n) un couple d'entiers naturels non nuls ; $\mathcal{C} = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, ...\varepsilon_d)$ est en fait *La* base de $\mathbb{R}_d[X]$.

a) *Montrons que $T(\mathbb{R}_d[X]) \subset \mathbb{R}_d[X]$* : Pour cela, T étant linéaire, il suffit de montrer que l'image de chacun des vecteurs de base ε_k est un vecteur de $\mathbb{R}_d[X]$.
Pour tout $0 \leq k \leq d$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
T(\varepsilon_k)(x) &= \int_{x-1}^{x+1} t^k dt = \frac{1}{k+1}\left[t^{k+1}\right]_{x-1}^{x+1} \\
&= \frac{1}{k+1}\big((x+1)^{k+1} - (x-1)^{k+1}\big) \\
&= \frac{1}{k+1}\big(x^{x+1} + (k+1)x^k + R_1(x) - (x^{k+1} - (k+1)x^k + R_2(x))\big) \\
&\qquad \text{d'après la formule du binôme de Newton, avec } R_1\ ,\ R_2 \in \mathbb{R}_{k-1}[X] \\
&= \frac{1}{k+1}\big(2(k+1)x^k + R(x)\big) \text{ avec } R = R_1 - R_2 \in \mathbb{R}_{k-1}[X] \\
&= 2x^k + S(x) \text{ où } S = \frac{1}{k+1}R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]
\end{aligned}$$

En conséquence, $\forall 0 \leq k \leq d$, $T(\varepsilon_k) \in \mathbb{R}_k[X] \subset R_d[X]$

Conclusion : $\boxed{T(\mathbb{R}_d[X]) \subset R_d[X]}$

b) *Montrons que* $A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *:*

On note désormais A_d la matrice dans la base $\mathcal{C}$ de la restriction, Θ_d, de T à $\mathbb{R}_d[X]$. Pour expliciter A_3 il suffit donc de calculer $T(\varepsilon_0)$, $T(\varepsilon_1)$, $T(\varepsilon_2)$ et $T(\varepsilon_3)$.
Utilisons ce qui précède et développons davantage, quand nécessaire, le binôme de Newton.

Pour tout x réel, on a :

① $T(\varepsilon_0)(x) = 2x^0 = 2$

② $T(\varepsilon_1)(x) = 2x + S_1(x)$ où S_1 est un polynôme constant.
Or ε_1 est impair donc d'après II/4., $T(\varepsilon_1)$ est impaire, ce qui impose $S_1(x) = 0$.
D'où $T(\varepsilon_1)(x) = 2x$

③ $$\begin{aligned} T(\varepsilon_2)(x) &= \frac{1}{3}[(x+1)^3 - (x-1)^3] = \frac{1}{3}[x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1)] \\ &= \frac{1}{3}(6x^2 + 2) = 2x^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

④ $$\begin{aligned} T(\varepsilon_3)(x) &= \frac{1}{4}[(x+1)^4 - (x-1)^4] = \frac{1}{4}[x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 - (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1)] \\ &= \frac{1}{4}(8x^3 + 8x) = 2x^3 + 2x \end{aligned}$$

On en déduit :

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ? La matrice carrée A_3 est triangulaire supérieure. Ses valeurs propres se lisent donc sur sa diagonale.
Autrement dit $\boxed{\mathrm{Sp}(A_3) = \{2\}}$
On montre en raisonnant par l'absurde qu'elle n'est pas diagonalisable. En effet, si A_3 est diagonalisable, alors : $\exists P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, inversible, telle que

$$A_3 = P \cdot D_3 \cdot P^{-1} \text{ où } D_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot I_3$$

soit

$$A_3 = 2PI_3P^{-1} = 2I_3$$

Ce qui est absurde. ***Conclusion*** : $\boxed{A_3 \text{ n'est pas diagonalisable}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Le calcul facile de la matrice même lorsqu'il est juste, amène de réponses sans fin sur sa diagonalisabilité... Elle est triangulaire supérieure. Nous tenons à signaler les erreurs classiques : cette matrice n'ayant que* 4 *valeurs propres* *distinctes...* »

c) *Déterminons l'ensemble des valeurs propres de* Θ_d *:*
D'après la question 2.a) on se souvient que

$$T(\varepsilon_k)(x) = 2x^k + S(x) \text{ où } S = \frac{1}{k+1}R \in \mathbb{R}_{k-1}[X]$$

Cela signifie que la matrice A_d est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 2.
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Sp}(A_k) = \{2\}}$

d) *Dans le cas où* $d \geq 2$*, l'endomorphisme* Θ_d *est-il diagonalisable ?* Pour les mêmes raisons que celle développées en 2.b) pour A_3, on peut conclure que $\boxed{A_d \text{ n'est pas diagonalisable}}$

e) *L'endomorphisme* Θ_d *est-il bijectif ?* On note que 0 n'est pas une valeur propre de A_d.
Conclusion : $\boxed{A_d \text{ est inversible ou encore } \Theta_d \text{ est bijectif}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Il est à noter que les notions de diagonalisabilité et d'inversibilité prises ensemble perturbent beaucoup les candidats qui se persuadent d'un lien entre elles* »

Quatrième partie : Étude d'une transformée

On note g l'application définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\, g(x) = \sqrt[3]{x(x^2-1)}$$

On rappelle que pour tout x réel, on note $\sqrt[3]{x}$ l'unique réel dont le cube vaut x.

Rappel préalable : La fonction $b : x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est une fonction usuelle au programme dont il est bon de rappeler les principales propriétés, à commencer par le fait que $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ et $x \longmapsto x^{1/3}$ sont deux fonctions distinctes mais qui coïncident sur $\mathbb{R}_+^*$...

La fonction $a : x \longmapsto x^3$ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, telle que $a(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Autrement dit a est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ dont la bijection réciproque est $b = a^{-1}$ définie par : $b(y) = a^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Les conséquences immédiates sont :
$x \longmapsto \sqrt[3]{x}$ est comme a strictement croissante sur $\mathbb{R}$, impaire, et dérivable en tout y réel pour lequel

$$a'(a^{-1}(y)) = 3\left(a^{-1}(y)\right)^2 \neq 0 \Leftrightarrow a^{-1}(y) \neq 0 \Leftrightarrow y \neq a(0) = 0$$

Dès lors, b est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, avec

$$\forall y \in \mathbb{R}^*,\, b'(y) = \frac{1}{a'(a^{-1}(y))} = \frac{1}{3a^{-1}(y)^2} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

1. Étude de la fonction g.

a) *Étudions la continuité et la dérivabilité de la fonction g :*

- Pour la continuité : La fonction $x \longmapsto x(x^2-1)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$. Puisque b définie par $b(x) = \sqrt[3]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions continues.
- Pour la dérivabilité : La fonction b est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et la fonction $x \longmapsto x(x^2-1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = -1,\ x = 0 \text{ ou } x = 1$$
On en déduit que g est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ par composition de fonctions dérivables sur cet ensemble.

Lu dans le rapport de jury : « *L'énoncé suggérait une fonction g définie sur $\mathbb{R}$... et non sur l'ensemble des réels strictement positifs.*
Encore une fois, le domaine d'étude est laborieux avec beaucoup de candidats qui voient la racine cubique dérivable sur $\mathbb{R}$, et approximatif dans ses explications, par exemple on calcule la dérivée et après on regarde où elle pose problème... »

b) *Déterminons les limites de g aux bornes de son ensemble de définition et donnons son tableau de variations :*
On note que les fonctions racine cubique et $x \longmapsto x(x^2-1)$ sont toutes les deux impaires et donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.
On se contente d'étudier la limite de g en $+\infty$ et de tracer son tableau de variation sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 - x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty$$

D'où

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \text{ (l'imparité de } g \text{ donnant : } \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty)$$

Pour obtenir le tableau de variation, calculons la dérivée de g :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\},\ g'(x) = \frac{3x^2-1}{3\left(\sqrt[3]{x^3-x}\right)^2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Soit :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$	$g(1/\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

c) *Montrons que $\mathcal{G}_1$, courbe représentative de g, admet une asymptote oblique dont on étudiera la position par rapport à la courbe $\mathcal{G}_1$ aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$:*
Là encore, grâce à l'imparité de g, on se contente de déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et pour ça, le plus simple est d'utiliser les développements limités au voisinage de

$X = 0$ de la fonction $Xg(1/X)$ où $X = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} Xg(1/X) &= X\sqrt[3]{\frac{1}{X^3} - \frac{1}{X}} = X\sqrt[3]{\frac{1-X^2}{X^3}} \\ &= \sqrt[3]{1-X^2} \text{ car } \sqrt[3]{X^3} = X \\ &= \left(1-X^2\right)^{1/3} \text{car } x > 1 \Leftrightarrow 0 < X < 1 \text{ et donc } 1 - X^2 > 0 \\ &= 1 - \frac{1}{3}X^2 + \circ(X^2) \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\frac{1}{x}g(x) \underset{x \to +\infty}{=} 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} + \circ\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ou encore

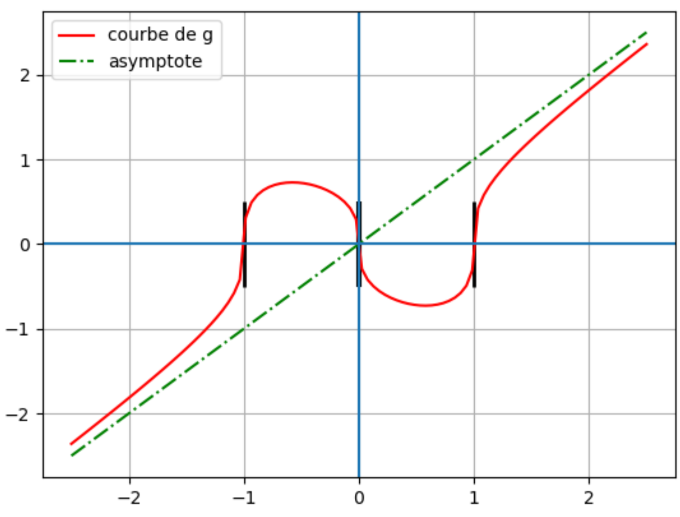
$$g(x) \underset{x \to +\infty}{=} x - \frac{1}{3x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conclusion : $\boxed{\text{La première bissectrice est asymptote à } \mathcal{G}_1 \text{ au voisinage de } +\infty}$

Par ailleurs, $\boxed{\mathcal{G}_1 \text{ est sous l'asymptote au voisinage de } +\infty\text{...}}$
L'asymptote sera la même en $-\infty$, mais $\mathcal{G}_1$ au-dessus l'asymptote.

Lu dans le rapport de jury : « *L'étude des branches infinies de g se limite, dans le meilleur des cas, à la limite du rapport $g(x)/x$ qui se transforme ensuite en une limite de $g(x) - x$ nulle... confusion classique entre l'équivalent et la limite de la différence. Les développements asymptotiques corrects ne dépassent pas la dizaine...* »

d) Tracer avec soin la courbe représentative de g ainsi que son asymptote oblique.



Lu dans le rapport de jury : « *Les tangentes verticales sont absentes de la représentation graphique de g, même pour les candidats ayant trouvé des limites infinies au taux de variation.* »

2. Étude de la fonction $T(g)$.

   a) *Étudions la parité de $T(g)$:* C'est immédiat d'après II.5). L'imparité de g assure celle de $T(g)$.
   Conclusion : $\boxed{T(g) \text{ est impaire.}}$

   b) *Déterminons les variations de $T(g)$:* La symétrie de la courbe de $T(g)$ par rapport à $O(0,0)$ nous permet de réduire l'étude de la dérivée à $\mathbb{R}_+$.
   D'après la question 1) de la deuxième partie :

$$\begin{aligned}(T(g))'(x) &= g(x+1) - g(x-1)\\ &= \sqrt[3]{(x+1)\left((x+1)^2-1\right)} - \sqrt[3]{(x-1)\left((x-1)^2-1\right)}\\ &= \sqrt[3]{(x+1)(x^2+2x)} - \sqrt[3]{(x-1)(x^2-2x)}\\ &= \sqrt[3]{x^3+2x^2+x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3-2x^2-x^2+2x}\\ &= \sqrt[3]{x^3+3x^2+2x} - \sqrt[3]{x^3-3x^2+2x}\end{aligned}$$

   or, si $x \geq 0$ alors $3x^2 \geq 0$ et donc : $x^3 - 3x^2 + 2x \leq x^3 + 3x^2 + 2x$
   Par ailleurs la fonction racine cubique est croissante sur $\mathbb{R}$, donc :

$$\sqrt[3]{x^3-3x^2+2x} \leq \sqrt[3]{x^3+3x^2+2x}$$

   En conséquence, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $(T(g))'(x) \geq 0$.
   Conclusion : $\boxed{T(g) \text{ croît sur } \mathbb{R}_+}$

   c) *Calculons la valeur de $T(g)(0)$:* Il suffit de rappeler l'imparité de $T(g)$.
   Conclusion : $\boxed{T(g)(0) = 0}$

   Lu dans le rapport de jury : « *L'étude de $T(g)(0)$ s'arrête sur un calcul sans espoir... alors que l'imparité.* »

FIN