



Intégration : Intégrale d'une fonction continue f sur un segment (l'existence de primitives pour une fonction continue sur un segment est admise). Lien avec la notion d'aire pour une fonction continue positive.

Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.

Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a .

Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.

Compléments : Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Intégrations par parties. Changements de variables (☞ « Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée »).

Exercice 1 * : Calculer les intégrales usuelles suivantes :

$$\begin{aligned}
 a) I &= \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx; & b) I &= \int_0^{\pi/6} \sin(3x) dx; & c) I &= \int_0^x \sqrt{2t+1} dt; & d) I &= \int \frac{1}{(x+1)\sqrt{x+1}} dx \\
 e) I &= \int_1^x \left(t^2 + \sqrt{t} + \frac{1}{t^2} \right) dt; & f) I &= \int \sin^3(x) dx; & g) I &= \int_0^1 \frac{e^x}{(e^x+1)^2} dx; & h) I &= \int_1^2 \frac{x dx}{(x^2+1)^2} \\
 i) I &= \int \frac{dx}{x^2+4}; & j) I &= \int_0^1 \frac{dx}{x^2-4}; & k) I &= \int t e^{-t^2/2} dt; & l) I &= \int_0^{\pi/4} (2+2\tan^2 x) dx
 \end{aligned}$$

Exercice 2 * : Intégration par parties et changements de variables

$$a) I = \int_0^1 \arctan(t) dt; \quad b) I = \int t^2 e^{-t^2/2} dt; \quad c) I = \int t^2 e^{-2t} dt; \quad d) I = \int \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right) dx$$

$$e) I = \int_2^5 \frac{x dx}{\sqrt{x-1}} \text{ (avec } u = \sqrt{x-1}\text{);} \quad f) I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \text{ (avec } x = \cos u\text{);} \quad g) I = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx;$$

avec, pour g), les changements de variables successifs : $x = \sin u$ et $v = \tan u$.

Exercice 3 : Intégrales et relations de récurrence

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $u_n = \int_{-1}^1 (1-t^2)^n dt$.

- ① Montrer que la suite (u_n) est décroissante. En déduire sa nature.
- ② Établir une relation entre u_n et u_{n+1} .
- ③ Calculer u_0 . En déduire une expression de u_n .
- ④ En déduire la valeur de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \binom{n}{k}$

Exercice 4 : fonctions définies par une intégrale

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$g(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt \text{ et } \forall x \neq 0, f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt.$$

- ① Étudier la parité de f .
- ② Montrer que g est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Donner une expression de sa dérivée.
- ③ Donner une relation simple entre f et g . En déduire que f est dérivable sur \mathbb{R}^* et calculer $f'(x)$.
- ④ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que f admet une limite en $+\infty$.
- ⑤ Appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir une majoration de $|\cos t - 1|$.
En déduire la limite en 0 de h définie par $h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Conclure sur le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice 5 : sommes de Riemann

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ la suite définie par : $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}, \forall n \geq 1$.

- ① Montrer que $nu_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I$ où I est l'intégrale sur l'intervalle $[0, 1]$ d'une fonction f qu'on précisera.
- ② Déterminer I grâce au changement de variable $t = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right)$.
- ③ En déduire que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2n}$. En faire la vérification grâce à une fonction Python.