-Décembre 2019-

DM - ESPACES VECTORIELS

Exercice 1 Par définition, $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$

$$F_\alpha = \{ f \in E \,/\, \exists P,Q \in \mathbb{R},[X],\ f(x) = P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

① Par caractérisation des sous-espaces vectoriels :

(i) $F_\alpha \subset E$ qui est un $\mathbb{R}$-EV.

(ii) $0_E \in F_\alpha$; il suffit de prendre $P = 0_{\mathbb{R},[X]} = Q$

(iii) $\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$, $\forall (f,g) \in F_\alpha^2$,

$\exists P_1,Q_1,P_2,Q_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ /

$f(x) = P_1(x)e^{\alpha x} + Q_1(x)e^{-\alpha x}\ \forall x \in \mathbb{R}$

$g(x) = P_2(x)e^{\alpha x} + Q_2(x)e^{-\alpha x}\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Dès lors :

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x) &= \lambda f(x) + \mu g(x)\\ &= [\lambda P_1(x) + \mu P_2(x)]e^{\alpha x} + [\lambda Q_1(x) + \mu Q_2(x)]e^{-\alpha x}\\ &= P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}\end{aligned}$$

où $P = \lambda P_1 + \mu P_2 \in \mathbb{R}_1[X]$

et $Q = \lambda Q_1 + \mu Q_2 \in \mathbb{R}_1[X]$ car $\mathbb{R}_1[X]$ est un $\mathbb{R}$-EV.

Donc $\lambda f + \mu g \in F_\alpha$ - Autrement dit F_α est stable par combinaisons linéaires

Conclusion $\boxed{F_\alpha \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

② $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$.

(i) On montre que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de F_α

car $\forall f \in F_\alpha$, $\exists P,Q \in \mathbb{R}_1[X]$ / $f(x) = P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x}$

$\Leftrightarrow \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ /

$$\begin{aligned}f(x) &= (ax+b)e^{\alpha x} + (cx+d)e^{-\alpha x}\\ &= axe^{\alpha x} + be^{\alpha x} + cxe^{-\alpha x} + de^{-\alpha x}\\ &= bf_1(x) + af_2(x) + df_3(x) + cf_4(x)\ \forall x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Soit : $\forall f \in F_\alpha$, $\exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ / $f = bf_1 + af_2 + df_3 + cf_4$

ou encore $\boxed{F_\alpha = \text{Vect}\{f_1, f_2, f_3, f_4\}}$

(ii) Pour montrer que f_α est libre, plusieurs méthodes possibles :

<u>Méthode 1</u> : Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ / $\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2+\lambda_3 f_3+\lambda_4 f_4=0$ (*)

(*) $\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}$, $\lambda_1 e^{\alpha x}+\lambda_2 x e^{\alpha x}+\lambda_3 e^{-\alpha x}+\lambda_4 x e^{-\alpha x}=0$

Supposons $\alpha>0$ [on raisonnera de même pour $\alpha<0$].
Par passage à la limite, on obtient :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}(\lambda_1+\lambda_2 x)e^{\alpha x}=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}(\lambda_3+\lambda_4 x)e^{-\alpha x}=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_2 x=0\\ \lambda_3+\lambda_4 x=0\end{array}\right. \forall x\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1=0=\lambda_2\\ \lambda_3=0=\lambda_4\end{array}\right.$$ car $\{1,x\}$ est libre...

□

<u>Méthode 2</u> (suggérée par l'énoncé).

$$e^{\alpha x}\underset{0}{=}1+\alpha x+\frac{\alpha^2}{2}x^2+\frac{\alpha^3}{6}x^3+o(x^3)$$
$$xe^{\alpha x}\underset{0}{=}x+\alpha x^2+\frac{\alpha^2}{2}x^3+o(x^3)$$
$$e^{-\alpha x}=1-\alpha x+\frac{\alpha^2}{2}x^2-\frac{\alpha^3}{6}x^3+o(x^3)$$
$$xe^{-\alpha x}=x-\alpha x^2+\frac{\alpha^2}{2}x^3+o(x^3)$$

Soit $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\in\mathbb{R}^4$ / $\lambda_1 e^{\alpha x}+\lambda_2 x e^{2x}+\lambda_3 e^{-\alpha x}+\lambda_4 x e^{-\alpha x}=0$ (*) $\forall x\in\mathbb{R}$

(*) $\Leftrightarrow (\lambda_1+\lambda_3)+(\alpha\lambda_1+\lambda_2-\alpha\lambda_3+\lambda_4)x+\left(\lambda_1\frac{\alpha^2}{2}+\alpha\lambda_2+\frac{\alpha^2}{2}\lambda_3-\alpha\lambda_4\right)x^2$
$+\left(\frac{\alpha^3}{6}\lambda_1+\frac{\alpha^2}{2}\lambda_2-\frac{\alpha^3}{6}\lambda_3+\frac{\alpha^2}{2}\lambda_4\right)x^3+o(x^3)\ \forall x\in\mathbb{R}$
$=0+o(x^3)$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_1+\lambda_3=0\\ \alpha(\lambda_1-\lambda_3)+\lambda_2+\lambda_4=0\\ \frac{\alpha^2}{2}(\lambda_1+\lambda_3)+\alpha(\lambda_2-\lambda_4)=0\\ \frac{\alpha^3}{6}(\lambda_1-\lambda_3)+\frac{\alpha^2}{2}(\lambda_2+\lambda_4)=0\end{array}\right.$$ car un DL est nul ssi tous ses coefficients sont nuls...

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}\lambda_1+\lambda_3=0 & (L_1)\\ \lambda_2-\lambda_4=0 & (L_2)\\ 2(\alpha\lambda_1+\lambda_2)=0 & (L_3)\\ \frac{\alpha}{3}\lambda_1+\lambda_2=0 & (L_4)/\alpha^2\end{array}\right.$$ car $\alpha\neq0$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lambda_3=-\lambda_1\\ \lambda_4=\lambda_2\\ \lambda_2=-\alpha\lambda_1\\ \frac{\alpha}{3}\lambda_1-\alpha\lambda_1=-\frac{2}{3}\alpha\lambda_1=0\end{array}\right.$$

$\Leftrightarrow \lambda_1=0=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ car $\alpha\neq0$

□

(i)+(ii) la famille $\mathcal{B}$ est libre et génératrice de l'espace vectoriel F_α.

Conclusion | $\mathcal{B}$ est une base de F_α

(3) On note D_α la restriction de D à F_α.
Autrement dit : $\forall f \in F_\alpha$, $D_\alpha(f) = D(f) = f'$

(i) la linéarité de la dérivée D impose la linéarité de D_α car $\forall f \in F_\alpha, \forall g \in F_\alpha, \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$,

$$D_\alpha(\lambda f + \mu g) = D(\lambda f + \mu g) = (\lambda f + \mu g)'$$
$$= \lambda f' + \mu g' = \lambda D(f) + \mu D(g)$$
$$= \lambda D_\alpha(f) + \mu D_\alpha(g).$$

(ii) $\forall f \in F_\alpha, \exists P, Q \in \mathbb{R}_1[X] / f(x) = P(x)e^{\alpha x} + Q(x)e^{-\alpha x} \ \forall x \in \mathbb{R}$.
Donc
$D_\alpha(f)(x) = f'(x) = [P'(x) + \alpha P(x)]e^{\alpha x} + [Q'(x) - \alpha Q(x)]e^{-\alpha x}$
or $P' + \alpha P \in \mathbb{R}_1[X]$ et $Q' - \alpha Q \in \mathbb{R}_1[X]$
car $P \in \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow P' \in \mathbb{R}_1[X]$ et $\mathbb{R}_1[X]$ est un $\mathbb{R}$-EV.
$Q \in \mathbb{R}_1[X] \Rightarrow Q' \in \mathbb{R}_1[X]$
Donc : $\forall f \in F_\alpha$, on a bien $D_\alpha(f) \in F_\alpha$.

Conclusion (i)+(ii) : $\boxed{D_\alpha \in \mathcal{L}(F_\alpha)}$

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$,
$D(f_1)(x) = f_1'(x) = \alpha e^{\alpha x} = \alpha f_1(x) \Leftrightarrow D(f_1) = \alpha f_1 = (\alpha, 0, 0, 0)_B$
$D(f_2)(x) = f_2'(x) = (1 + \alpha x)e^{\alpha x}$
$= f_1(x) + \alpha f_2(x) \Leftrightarrow D(f_2) = f_1 + \alpha f_2 = (1, \alpha, 0, 0)_B$
$D(f_3)(x) = f_3'(x) = -\alpha e^{-\alpha x} \Leftrightarrow D(f_3) = -\alpha f_3 = (0, 0, -\alpha, 0)_B$
$D(f_4)(x) = f_4'(x) = (1 - \alpha x)e^{-\alpha x}$
$= f_3(x) - \alpha f_4(x) \Leftrightarrow D(f_4) = f_3 - \alpha f_4 = (0, 0, 1, -\alpha)_B$

On en déduit que :
$$\Pi_\alpha = \mathcal{M}_B(D_\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$rg(\Pi_\alpha) = 4 = \text{ordre}(\Pi_\alpha)$ car matrice triangulaire supérieure sans 0 sur la diagonale.
Π_α est une matrice inversible.
Conclusion D_α est un endomorphisme bijectif
ou encore $\boxed{D_\alpha \text{ est un automorphisme.}}$

$n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ sont n réels distincts

on pose $L_k(x) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{x - a_i}{a_k - a_i}$, $\forall k \in [\![1, n]\!]$.

① Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$L_k(a_k) = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \frac{a_k - a_i}{a_k - a_i} = 1$

et pour $j \neq k$: $L_k(a_j) = \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k \\ i \neq j}}^{n} \frac{a_j - a_i}{a_k - a_i} \right) \times \underbrace{\frac{a_j - a_j}{a_k - a_j}}_{=0} = 0$

Conclusion : $\forall (j,k) \in [\![1, n]\!]^2$,

$$L_k(a_j) = \begin{cases} 1 \text{ si } j = k \\ 0 \text{ si } j \neq k \end{cases}$$

② Montrons que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

→ On commence par noter que :

$\text{Card}(\mathcal{L}) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$

il est donc suffisant de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base.

↳ Surtout ne pas dire que si $\text{Card}(\mathcal{L}) = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ alors la famille est génératrice car ce n'est pas le cas

[Par exemple : si $P_0(X) = 2X$, $P_1(X) = X$ et $P_2(X) = 3X$, cette famille est de cardinal 3 sans pour autant être génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$ ...!]

→ Montrons que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ est une famille libre de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(i) D'abord, ce sont bien des polynômes à coefficients réels, de degré égale à $(n-1)$ puisque :

$$\deg(L_k) = \deg\left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} (X - a_i) \right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \deg(X - a_i) = n - 1$$

Donc $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $L_k \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

(ii) Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ / $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k = 0$ $(*)$

$(*) \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k(x) = 0$

Et pour tout $a_j \in \{a_1, \dots, a_n\}$ on a : $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k L_k(a_j) = 0$

$(**) \Leftrightarrow \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \lambda_k L_k(a_j) + \lambda_j L_j(a_j) = 0 \Leftrightarrow \lambda_j = 0$ d'après ① $(**)$.

Conclusion: $(L_1, \dots, L_n)$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ libre et de cardinal égale à $\dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$ (c'est donc une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$).

③ Par définition d'une base, tout polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ admet une décomposition unique dans cette base.

→ Déterminons cette décomposition:

$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, $\exists! (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ / $P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k$

En exploitant la question ① on a immédiatement:

$\forall j \in [\![1, n]\!]$, $P(a_j) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k L_k(a_j) = \alpha_j \cdot 1 = \alpha_j$

Conclusion $\boxed{P = \sum_{k=1}^{n} P(a_k) L_k = (P(a_1), P(a_2) \dots P(a_n))_{\mathcal{L}}}$.

④ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$, déterminons $P = \sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$

d'après ce qui précède, on a: $P(a_i) = a_i^p$ $\forall i \in [\![1, n]\!]$.

→ Montrons que $P(X) = X^p \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ (puisque $0 \leq p \leq n-1$)

Pour ça, on pose $Q(X) = X^p$ et $R(X) = P(X) - Q(X)$

alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $R(a_i) = P(a_i) - Q(a_i) = a_i^p - a_i^p = 0$

Donc $R \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et admet n racines distinctes.

D'où R est le polynôme nul et donc $P = Q = X^p$

Conclusion $\sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i(X) = X^p$ et ce $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$

ou encore: $X^p = (a_1^p, a_2^p \dots a_n^p)_{\mathcal{L}}$

Conséquence: Si $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, alors:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & a_n & a_n^2 & & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$