COLLE SEMAINE 23 - SUJET 1 -

Cours :

Connaître ses définitions. Pas de démonstration exigible.

Exercice :

On rappelle que si X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable à densité et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{Pour tout réel} t,\ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u) du$$

est une densité de $X+Y$.
On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $[0;1]$.

① Justifier son existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2, ainsi qu'une densité de V^2.

② On considère la variable aléatoire $Z = U^2+V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h.

③ Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $P(Z \leq 1)$.

④ a) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$.

b) Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$.

c) Montrer que, sur $]0;1]$, on a : $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
(On pourra utiliser le changement de variable $y = sin^2(u)$).

d) Interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.

⑤ On considère une suite de variables aléatoires de Bernoulli $(Y_n)_{n\geq 1}$ mutuellement indépendantes et de même paramètre $\dfrac{\pi}{4}$, et on note $S_n = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ pour tout entier $n \geq 1$.

a) Soit $\varepsilon > 0$, déterminer, en fonction de n et ε, une majoration de $P\left(\left|S_n - \dfrac{\pi}{4}\right| \geq \varepsilon\right)$.

b) En déduire, à partir de quelle valeur de n, il est possible de définir un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

c) Á l'aide de la simulation précédente, déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2}.

⑥ Existe-t-il d'autres alternatives pour déterminer un intervalle de confiance de niveau de confiance $0,95$ de $\dfrac{\pi}{4}$ et d'amplitude 2×10^{-2} ?