Exercice 6 :

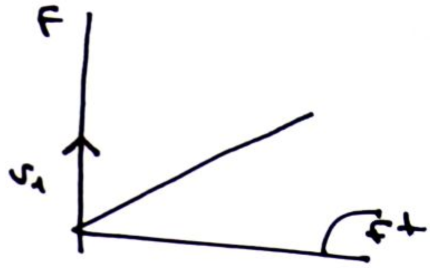
$F = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x=y=z\}$

$= \mathrm{Vect}\{u_1\}$ où $u_1=(1,1,1)$ / $\|u_1\|=\sqrt{3}$

$= \mathrm{Vect}\{v_1\}$ où $v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}u_1$ / $\|v_1\|=1$.

et $F^\perp = \{u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, (u|v_1)=0\}$

$= \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, x+y+z=0\}$



$\dim(F)=1 < \dim(F^\perp)=2$

→ On commence par la projection orthogonale p_F sur F :

① <u>Le plus rapide</u> : $\forall u\in\mathbb{R}^3$, $p_F(u) = (v_1|u).v_1$

Soit

$$p_F(x,y,z) = \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}.v_1 = \frac{1}{3}(x+y+z,\, x+y+z,\, x+y+z)$$

$$M = \mathcal{M}_B(p_F) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix} \quad \left[= V_1.{}^tV_1\right]$$

② <u>Expression de</u> $p_{F^\perp}$:

<u>méthode 1</u> : $p_F + p_{F^\perp} = id \Rightarrow N = \mathcal{M}(p_{F^\perp}) = I - M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}$

<u>méthode 2</u> : $\forall u\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} p_{F^\perp}(u) = (x',y',z')\in F^\perp \\ u-p_{F^\perp}(u) = (x-x',y-y',z-z')\in F \end{cases}$ (S)

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x'+y'+z'=0 \\ x-x'=\lambda \\ y-y'=\lambda \\ z-z'=\lambda \end{cases},\ \lambda\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=x-\lambda \\ y'=y-\lambda \\ z'=z-\lambda \\ \lambda=\frac{1}{3}(x+y+z) : [L_1] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{1}{3}(x+y+z) \\ x'=\frac{1}{3}(2x-y-z) \\ y'=\frac{1}{3}(-x+2y-z) \\ z'=\frac{1}{3}(-x-y+2z) \end{cases}$$

Soit

$$p_{F^\perp}(x,y,z) = \frac{1}{3}(2x-y-z,\, -x+2y-z,\, -x-y+2z) \quad \square$$

<u>méthode 3</u> : (i) <u>b.o.n de $F^\perp$</u> : . $u_2=(-1,1,0)\in F^\perp$

. $u_3=(x,y,z)\in F^\perp \,/\, (u_3|u_2)=0$

$\to u_3\in F^\perp$: $\begin{cases} x+y+z=0 \\ -x+y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=-2y \end{cases}, y\in\mathbb{R} \Rightarrow u_3=(1,1,-2)$

$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|}u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)$ et $v_3 = \frac{1}{\|u_3\|}u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$

<u>$B' = (v_2,v_3)$ b.o.n de $F^\perp$</u>

D'où $p_{F^\perp}(e_1) = (e_1|v_2)v_2 + (e_1|v_3)v_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}v_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}v_3$

$= -\frac{1}{2}(-1,1,0) + \frac{1}{6}(1,1,-2) = (2/3, -1/3, -1/3)$

De m̂, on obtient : $p_{F^\perp}(e_2) = (-1/3, 2/3, -1/3)$

$p_{F^\perp}(e_3) = (-1/3, -1/3, 2/3)$. CQFT

TD 17 - Exercice 7.

Soit $B = (\vec{u}, \vec{v})$ base orthonormée de $\mathcal{P}$
et $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ / $\|\vec{n}\| = 1$.

① Pour répondre à cette question, il suffit de justifier que $B_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est une b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

(i) $\mathrm{card}(B_1) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$

(ii) Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ / $\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{n} = \vec{0}$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = -\lambda_3 \vec{n} = \vec{t}$

avec $\vec{t} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}^\perp \Rightarrow \vec{t} = \vec{0}$ (En effet $(\vec{t} | \vec{t}) = 0 \Leftrightarrow \|\vec{t}\|^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{t} = \vec{0}$)

D'où $\begin{cases} \lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} = \vec{0} \\ \lambda_3 \vec{n} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$

car $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ famille libre et $\vec{n} \neq \vec{0}$.

Conclusion (i) + (ii) : $B_1 = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ b.o.n de $\mathbb{R}^3$

D'où $\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{w} = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{v} + \langle \vec{w}, \vec{n} \rangle \vec{n}$
$= \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle \vec{u} + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{v} + \langle \vec{n}, \vec{w} \rangle \vec{n}$.

---

② p = projection orthogonale sur $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.
Le cours nous assure que :
$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $p(\vec{w}) = \langle \vec{w}, \vec{u} \rangle \vec{u} + \langle \vec{w}, \vec{v} \rangle \vec{v}$
$= \vec{w} - \langle \vec{n}, \vec{w} \rangle \vec{n}$ d'après ①

(!) ↳ $p(\vec{w}) = \mathrm{id}(\vec{w}) - p_{\mathcal{P}^\perp}(\vec{w})$

③
```
def projOrth(W, N):
    nN = sqrt(sum([N[k]**2 for k in range(3)]))   # norme de N.
    N1 = [N[k]/nN for k in range(3)]
    pS = sum([W[k]*N1[k] for k in range(3)])
    return [W[k]-pS*N1[k] for k in range(3)]
```

Application $\vec{w} = (1,1,1)$, $\vec{n} = (1,2,3)$
$\Rightarrow \vec{n}_1 = \frac{1}{\|\vec{n}\|} \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{14}} \vec{n}$

alors $p(\vec{w}) = $ projOrth([1,1,1], [1,2,3])

Exercice 8 $f(x,y) = (2x+y-1)^2 + (x-3y)^2 + (y-1)^2 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) on pose $u = (2x+y, x-3y, y)$

$= x(2,1,0) + y(1,-3,1) = \underline{x.u_1 + y u_2}$

Donc $u \in F = \mathrm{Vect}\{u_1, u_2\}$ [Plan vectoriel car $\{u_1,u_2\}$ famille libre]

(ii) on pose $v = (1,0,1) \in \mathbb{R}^3$

Alors $f(x,y) = \|u - v\|^2$

Question : Déterminer $u \in F$ (exprimé dans la base $B_F = (u_1, u_2)$) tel que $\|u-v\|^2$ soit minimum.

$\rightarrow$ le cours assure qu'il s'agit de $\underline{u = p_F(v)}$

(iii) Déterminons $p_F(v)$:

$$\begin{cases} p_F(v) \in F \\ v - p_F(v) \in F^\perp \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_F(v) = (2x+y, x-3y, y) \\ p_F(v) - v = (2x+y-1, x-3y, y-1) \in F^\perp \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_F(v) = (2x+y, x-3y, y) \\ (p_F(v) - v \mid u_1) = 0 \Leftrightarrow 2(2x+y-1) + (x-3y) = 0 \\ (p_F(v) - v \mid u_2) = 0 \Leftrightarrow (2x+y-1) - 3(x-3y) + y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_F(v) = (2x+y, x-3y, y) \\ 5x - y = 2 \\ -x + 11y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 54x = 24 \\ 54y = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12/27 \\ y = 6/27 \end{cases}$$

Conclusion f atteint son minimum en $(x_0, y_0) = \left(\frac{12}{27}, \frac{6}{27}\right)$ et vaut $f(x_0, y_0) = 2/3$

Remarque : Cours sur les fonctions de 2 variables :

Si f admet un extremum, alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

Soit :

$$(S) \begin{cases} \partial f/\partial x \,(x,y) = 4(2x+y-1) + 2(x-3y) = 0 \\ \partial f/\partial y \,(x,y) = 2(2x+y-1) - 6(x-3y) + 2(y-1) \end{cases}$$

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - 2y = 4 \\ -2x + 22y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - y = 2 \\ -x + 11y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12/27 \\ y = 6/27 \end{cases}$$

D'où, le seul extremum possible est en $(x_0, y_0) = \left(\frac{12}{27}, \frac{6}{27}\right)$

Il resterait à prouver que c'est bien un minimum...