

TD 17 - Produits scalaires.

Exercice 1 Formule de Cauchy-Schwarz: $(u|v)^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2$

① On pose $u = (\frac{1}{\sqrt{x_1}}, \frac{1}{\sqrt{x_2}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{x_n}})$

$$v = (\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n})$$

Alors:

$$(u|v)^2 = \left(\sum_{k=1}^n 1 \right)^2 = n^2 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \cdot \sum_{k=1}^n x_k \quad \square$$

② $E = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / \sum x_n^2 < \infty\}$.

(i) $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui est un $\mathbb{R}$ -E.V.

(ii) La suite nulle appartient à E car $\sum 0^2 < \infty$ (de somme nulle).

(iii) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda(x_n + y_n) \in E$
Il faut que $\sum (\lambda x_n + y_n)^2 < \infty$. Sachant que $\sum x_n^2$ et $\sum y_n^2$ convergent.

D'après l'inég. de Cauchy-Schwarz:

$$\text{En posant } u = (\lambda x_n, y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|u\|^2 = \lambda^2 x_n^2 + y_n^2$$

$$v = (1, 1) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|v\|^2 = 2$$

on obtient:

$$(u|v)^2 = (\lambda x_n + y_n)^2 \leq 2(\lambda^2 x_n^2 + y_n^2)$$

$$\text{or } \sum x_n^2 < \infty \text{ donc } \sum 2\lambda^2 x_n^2 < \infty$$

$$\sum y_n^2 < \infty \text{ donc } \sum 2y_n^2 < \infty$$

donc, $\sum (2\lambda^2 x_n^2 + 2y_n^2) < \infty$ comme somme de 2 séries convergentes.

Alors, d'après le TGCSTP:

$$\sum (\lambda x_n + y_n)^2 < \infty \Leftrightarrow (\lambda x_n + y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E.$$

Conclusion | E est SEV d'un $\mathbb{R}$ -E.V.

| E est donc un $\mathbb{R}$ -E.V.

Exercice 2 ① C'est une question de cours qu'il faut savoir rédiger.

② $F = \text{Vect}\{v\}$ où $v = (1, 1, 1)$.

$u = (2, 4, 1) \in F^\perp \Leftrightarrow (u, v) = 0$ d'après ①.
 $\Leftrightarrow x + y + z = 0 \quad \square$

Soit $F^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

on cherche une b.o.n de $F^\perp$:

- on commence par prendre un vecteur $u_1 \in F^\perp$.
Par exemple $u_1 = (1, 0, -1)$.

- on cherche $u_2 \in F^\perp \mid (u_1, u_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \quad (5)$
 $(5) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y + z = 0 \end{cases} \quad (4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$

Par exemple $u_2 = (1, -1, 1)$.

- (u_1, u_2) est une base orthogonale de $F^\perp$.
- on normalise cette base en posant:

$$v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} \cdot u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1).$$

$$v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} \cdot u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, -1, 1).$$

Conclusion $B' = (v_1, v_2)$ est une base orthonormée de $F^\perp$

Rq.: évidemment $-v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} (-1, 1, -1)$ est également un vecteur de $F^\perp$ qui est orthogonal à v_1 .

Donc $B'' = (v_1, -v_2)$ est une autre b.o.n de $F^\perp$.

Exercice 3

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\Rightarrow S = A \cdot {}^t A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On a d'ailleurs: ${}^t S = {}^t(A \cdot {}^t A) = {}^t({}^t A) \cdot {}^t A = A \cdot {}^t A = S$

Donc S est une matrice symétrique d'ordre n

S est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont toutes réelles.

On $S_p(S) \subset \mathbb{R}^+$

$$\lambda \in S_p(S) \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \mid SX = \lambda X$$

$$\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq 0 \mid A \cdot {}^t A X = \lambda X \quad (*)$$

on multiplie (*) à gauche par ${}^t X$. Alors:

$${}^t X A {}^t A X = {}^t X (\lambda X) = \lambda {}^t X X.$$

$$\text{or } {}^t X A {}^t A X = {}^t ({}^t A X) \cdot ({}^t A X) = \|{}^t A X\|^2$$

$$\text{car } {}^t A X \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

et si $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^t Y \cdot Y = \|Y\|^2$.

d'où

$$(*) \Rightarrow \|{}^t A X\|^2 = \lambda \|X\|^2$$

$$\text{avec } \|{}^t A X\|^2 \geq 0 \text{ et } \|X\|^2 \geq 0.$$

donc $\boxed{\lambda \geq 0}$. Q.E.D.

Exercice 4

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \lambda \in \text{Sp}(A_1) &\Leftrightarrow \det(A_1 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow -(4-\lambda)(4+\lambda) - 9 = 0 \Leftrightarrow -(16 - \lambda^2) - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 5)(\lambda + 5) = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \text{Sp}(A_1) = \{-5, 5\}.$$

$$(x, y) \in E_{-5} \Leftrightarrow (A_1 + 5I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 9x + 3y = 0 \Leftrightarrow 3x + y = 0$$

$$(x, y) \in E_5 \Leftrightarrow (A_1 - 5I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -x + 3y = 0$$

$$\text{Donc } E_{-5} = \text{Vect}\{u_1\} \text{ où } u_1 = (1, -3)$$

$$E_5 = \text{Vect}\{u_2\} \text{ où } u_2 = (3, 1),$$

on vérifie que $(u_1, u_2) = 0$ [d'orthog].

$$\text{on pose } v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} (1, -3) \quad \left. \begin{array}{l} v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} (3, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow (v_1, v_2) = \delta' \text{ d'orth} \\ \text{donc de } \mathbb{R}^2.$$

$$\text{Ainsi } A_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \text{ avec } P_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

on vérifie que $P_1^{-1} = {}^t P_1$ (ou que ${}^t P_1 P_1 = I$)

$$\text{Soit } \underline{A_1 = P_1 D_1 {}^t P_1}$$

Remarque En prenant $D_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$, il fallait considérer la notation de passage:

$$P_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ v_2 & v_1 \in E_{-5} \end{array}$$

Exercice 4

$\lambda \in \text{Sp}(A_2) \Leftrightarrow \text{rg}(A_2 - \lambda I) < 3$ oré :

$$\text{rg}(A_2 - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 4 & 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -2(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 0 & 2(\lambda+1) & (\lambda+1)(3-\lambda) \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 2L_2 - 4 \\ L_3 \leftarrow 4L_3 - (3-\lambda)L_1 \end{array}$$

$$= \text{rg} \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & -2(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 0 & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix} = \boxed{\text{rg}(U_\lambda)} \quad [(!) \text{ pas de discussion sur le pivot...}]$$

Donc $\lambda \in \text{Sp}(A_2) \Leftrightarrow \lambda+1=0$ ou $p(\lambda)=0$

$$\text{oré } p(\lambda) = (\lambda+1)(7-\lambda) + (\lambda+1) = (\lambda+1)(8-\lambda).$$

Conclusion $\boxed{\text{Sp}(A_2) = \{-1, 8\}}$.

A_2 est symétrique donc diagonalisable dans une b.o.n de vecteurs propres...

$$(i) \ x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A_2 + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow 4x + 4y + 4z = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

base orthonormée de E_{-1} ? $u_1 = (1, 0, -1) \in E_{-1}$

on cherche $u_2 = (x, y, z) \in E_{-1}$ tel que $(u_2 | u_1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$

$$\rightarrow u_2 = (z, -4z, z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

on prend $u_2 = (1, -4, 1) \in E_{-1}$ oré $(u_2 | u_1) = 0$.

$$\text{Soit } v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_1 \text{ et } v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = \frac{1}{\sqrt{18}} u_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} u_2$$

Alors (v_1, v_2) est une b.o.n de E_{-1}

$$(ii) \ x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_8 \Leftrightarrow U_8 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y - 5z = 0 \\ -2y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2y \\ x = 2y \end{cases} \text{ oré}$$

$$E_8 = \text{Vect}\{u_3\} \text{ oré } u_3 = (2, 1, 2)$$

$$= \text{Vect}\{v_3\} \text{ oré } v_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{3} u_3$$

Alors $B' = (v_1, v_2, v_3)$ est une b.o.n de vecteurs propres.

$$(iii) \ A_2 = P_2 D_2 {}^t P_2 \text{ oré } D_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \\ 0 & -4/3\sqrt{2} & 1/3 \\ -1/\sqrt{2} & 1/3\sqrt{2} & 2/3 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

$$\lambda \in S_p(A_3) \Leftrightarrow \text{rg}(A_3 - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} < 3.$$

avec

$$\text{rg}(A_3 - \lambda I) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -\lambda & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda^2 \end{pmatrix} = \text{rg}(U_\lambda)$$

$$\text{Donc } \lambda \in S_p(A_3) \Leftrightarrow 1-\lambda = 0 \text{ ou } 1-\lambda^2 = (1-\lambda)(1+\lambda) = 0.$$

$$\text{Conclusion } S_p(A_3) = \{-1, 1\}$$

Recherche d'une b.o.n de vecteurs propres.

$$(i) x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} \Leftrightarrow (A+I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z \\ y=0 \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$u_1 = (1, 0, -1) \in E_{-1} \text{ ainsi que } v_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, -1).$$

$$E_{-1} = \text{Vect}\{v_1\} / \|v_1\| = 1$$

$$(ii) x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 \Leftrightarrow (A-I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow U_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x-z=0 \\ E_1 = \{(x, y, x) / x, y \in \mathbb{R}\}.$$

$$\therefore u_2 = (0, 1, 0) \in E_1$$

$$\cdot \text{ on cherche } u_3 \in E_1 / (u_3 | u_2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=0 \end{cases} \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Soit par exemple } u_3 = (1, 0, 1).$$

$$\cdot (u_2, u_3) \text{ est une base orthogonale de } E_1.$$

$$\rightarrow \text{on normalise cette base avec } \begin{cases} v_2 = \frac{1}{\|u_2\|} u_2 = u_2 \\ v_3 = \frac{1}{\|u_3\|} u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_3 \end{cases}$$

$$\text{Alors } (v_2, v_3) \text{ est une b.o.n de } E_1.$$

(iii) la juxtaposition d'une b.o.n de E_{-1} et E_1 est une b.o.n de $\mathbb{R}^3$.

$$\text{Soit } B' = (v_1, v_2, v_3) \text{ b.o.n de } \mathbb{R}^3.$$

$$(iv) A_3 = P_3 D_3^t P_3 \text{ avec } D_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \\ \text{et} \\ A_3 = P_4 D_4^t P_4 \text{ avec } D_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$