

Exercice: Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire.
 A l'aide d'une matrice symétrique, étudier
 la conique d'équation $x^2 + 2xy + y^2 = 3$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 3 \iff {}^t X A X = 3 \quad (*)$$

avec ${}^t X = (x \ y)$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } (*) \iff (x \ y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 3$$

$$(*) \iff (x \ y) \begin{pmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{pmatrix} = 3$$

$$(*) \iff x(ax + by) + y(bx + cy) = 3$$

$$(*) \iff ax^2 + 2bxy + cy^2 = 3$$

Par identification, on trouve:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \\ c = 1 \end{cases}$$

$$\text{d'où } A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A \in S_n(\mathbb{R})$ donc A est diagonalisable

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1/2 \\ 1/2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \xrightarrow{\lambda_1 \rightarrow \lambda_2} \begin{pmatrix} 1/2 & 1-\lambda \\ 1-\lambda & 1/2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{d_2 + \frac{1}{2}d_1 - (1-\lambda)d_1 \\ \text{"} \mathcal{U}_1 \text{"}}} \begin{pmatrix} 1/2 & 1-\lambda \\ 0 & P(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{avec } P(\lambda) &= \frac{1}{4} - (1-\lambda)^2 = \frac{1}{4} - (1 - 2\lambda + \lambda^2) \\ &= -\frac{3}{4} + 2\lambda - \lambda^2 \\ P(\lambda) &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Delta = 2^2 - 4 \left(-\frac{3}{4}\right) \times (-1)$$

$$\Delta = 4 - 3 = 1 > 0$$

$$\lambda_1 = \frac{-2 - 1}{-2} = +\frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}$$

On en déduit que $\text{Sp}A = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right\}$

sous espaces propres :

$u_{1/2} = \begin{pmatrix} f(e_1) & f(e_2) \\ 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$ $\text{rg } u_{1/2} = 1$ donc d'après la formule du rg
 $\dim \text{Ker } u_{1/2} = \dim E - \text{rg } u_{1/2} = 2 - 1 = 1$

donc $\dim E_{1/2} = \dim [\text{Ker} (A - \frac{1}{2}I)] = 1$
 or $f(e_1) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = f(e_2)$

donc $f(e_1 - e_2) = 0$ donc $(e_1 - e_2) \in \text{Ker } u_{1/2}$

donc $E_{1/2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

De même $u_{3/2} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$

$\dim E_{3/2} = 1$ et $(e_1 + e_2) \in \text{Ker } u_{3/2}$
 $E_{3/2} = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\underbrace{\quad}_{u_2}$

(Rq) On vérifie : $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$

car on sait que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les $\vec{v}$ associés à des λ distinctes sont orthogonaux.

Donc la base $B = (u_1, u_2)$ est une base orthogonale des $\vec{v}$ de A

On pose : $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{2}}$ et $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{u_2}{\sqrt{2}}$

alors la base $B'' = (e_1, e_2)$ est une base orthonormée des $\vec{v}$ de A .

A est diagonalisable $\iff \exists P \in GL_n(\mathbb{R}) / A = P D P^{-1}$

avec $D = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\text{et } P^{-1} = {}^tP = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(En effet on a vu que toute matrice de passage formée de vecteurs orthogonaux et normés vérifie ${}^tP = P^{-1}$)

De plus, on a $X = P_{B, B'} X'$ avec $X = M_3(z)$
 $X' = M_3(w)$

$$\text{d'où } (*) \Leftrightarrow {}^t(PX') P D {}^tP PX' = 3$$

$$(*) \Leftrightarrow {}^tX' \underbrace{{}^tP P}_I D \underbrace{{}^tP P}_I X' = 3$$

$$(*) \Leftrightarrow {}^tX' D X' = 3$$

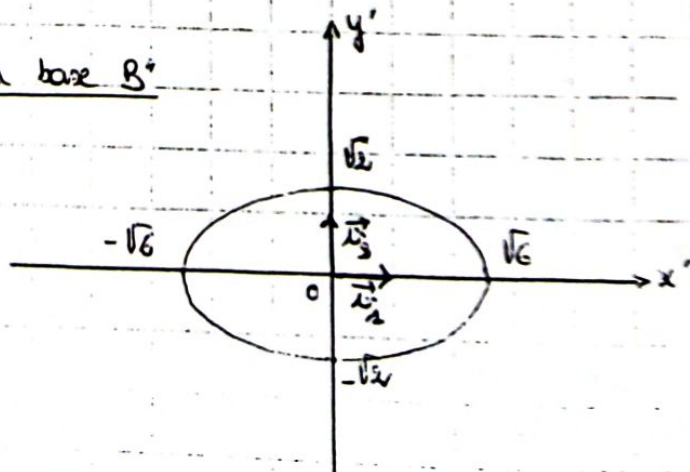
$$(*) \Leftrightarrow (x' y') \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 3/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 3 \Leftrightarrow (x' y') \begin{pmatrix} 1/2 x' \\ 3/2 y' \end{pmatrix} = 3$$

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{2} x'^2 + \frac{3}{2} y'^2 = 3$$

$$(*) \Leftrightarrow x'^2 + 3y'^2 = 6$$

$$(*) \Leftrightarrow y' = \pm \sqrt{2 - \frac{1}{3} x'^2}$$

représentation dans la base B'



représentation dans la base $\mathcal{B}$ (base canonique)

